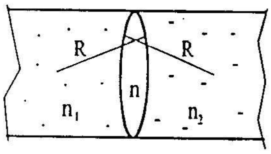
Državno natjecanje iz fizike '99 – 4. grupa

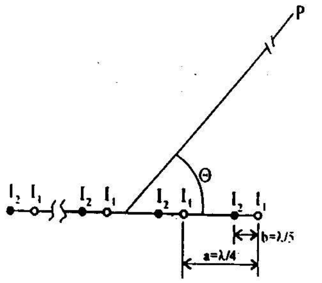
Zadatak 1 (16 bodova)

Odredi optičku moć (recipročna žarišna duljina) sustava koji se sastoji od tanke, simetrične, bikonveksne leće uronjene s jedne strane u sredstvo indeksa loma $n_1=1.33$ (voda), a s druge strane u sredstvo indeksa loma $n_2=1.63$ (ugljični bisulfid) – vidi sliku. Leća je načinjena od stakla indeksa loma $n=1.5$, a radijus zakrivljenosti njenih ploha je $R=30$cm. Usporedi rezultat sa slučajem kad je s obje strane leće zrak ($n_1=n_2=1$).
(Uputa: Provedi korektan izvod u aproksimaciji tanke leće i paraksijalnih zraka.)



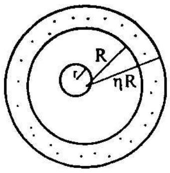
Zadatak 2 (20 bodova)

U ravnini se nalazi sustav od $2N=102$ točkasta izvora kružnih harmoničkih valova amplitude A i valne duljine λ. Svi izvori su smješteni na ravnoj liniji kao na slici. Izvori tipa I_1 titraju međusobno u fazi kao i izvori tipa I_2, ali izvori I_2 brzaju u fazi za $\Delta=\pi/15$ rad u odnosu na izvore I_1. Odredi amplitudu zračenja koju mjeri opažač u ravnini koji se nalazi pod kutem $\Theta=60°=\pi/3$ rad u odnosu na liniju na kojoj su smješteni izvori. Uzmi da je opažač jako daleko u odnosu na sustav izvora (udaljenost do opažača je puno veća od dimenzije sustava) i da se amplituda zračenja iz pojedinog izvora ne mijenja s udaljenošću od izvora.



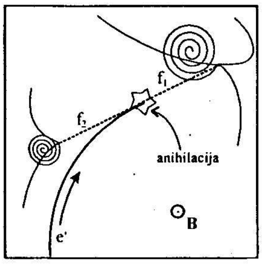
Zadatak 3 (20 bodova)

Idealno crno tijelo oblika kugle radijusa r održava se termostatom na stalnoj temperaturi T. Ono je smješteno unutar evakuirane (vakuum) sferne ljuske unutrašnjeg radijusa R, a vanjskog radijusa η puta većeg od unutrašnjeg, koja je također idealno crno tijelo s unutrašnje i vanjske strane. Odredi omjer snage zračenja izračenog u okolnji prostor (izvan sferne ljuske) i zračenja koje izrači kugla u sfernoj ljusci. Zanemarite bilo kakve gubitke topline zbog vođenja. Zašto takvu ljusku zovemo radijacijskim štitom?



Zadatak 4 (14 bodova)

Elementarne čestice, njihove raspade i međusobne reakcije promatramo u Willsonovoj komori. Svojim prolaskom kroz fluid u komori nabijena čestica ga ionizira i ostavlja za sobom trag sitnih mjehurića koji ocrtavaju njenu putanju. Komora se stavlja u magnetsko polje koje svija putanje nabijenih čestica.
Donja slika prikazuje pozitron e^+ koji ulijeće relativističkom brzinom u smjeru strelice. On pogađa mirni elektron (u materiji) i s njim se anihilira u dva visokoenergetska fotona f_1 i f_2 od kojih se jedan giba u smjeru upadnog pozitrona, a drugi u suprotnom. Ti fotoni su na slici nacrtani crtkanim linijama. One se u realnosti ne vide već se detektiraju po reakcijama koje izazovu (mlazovi čestica na krajevima crtkanih linija). Komora se nalazi u homogenom magnetskom polju B=0.1 T usmjerenom prema "gore" iz ravnine slike. Radijus zakrivljenosti putanje pozitrona je R=3.5 cm. Odredi energije fotona nastalih anihilacijom (u MeV-ima).
(Masa i naboj elektrona: $m=9.11\cdot10^{-31}$ kg = 0.51 MeV/c^2, $q=1.6\cdot10^{-19}$C; brzina svjetlosti: $c=3\cdot10^8$m/s)



DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE "99. - 4. grupa
Eksperimentalni zadatak

ODREĐIVANJE DEBLJINE UZORAKA

Pribor:

- laser
- stalak
- okvir s optičkom rešetkom poznate konstante
- okvir s niti 1, 2
- ravnalo (mjerna traka)
- okvir s optičkom rešetkom nepoznate konstante
- zastor
- plastelin

Zadatak:

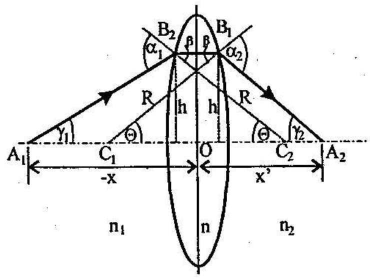
1.) objasniti teorijsku osnovu za rješavanje zadatka — 10 bodova
2.) eksperimentalno odrediti debljinu niti (1, 2) — 8 bodova
3.) odrediti nepoznato sredstvo - izmjeriti karakteristične veličine zadanim priborom (gustoću tkanja) — 8 bodova
4.) rezultate eksperimenta prikazati tablično — 4 boda

Ukupno 4. eksperimentalni zadatak: 30 bodova

Državno natjecanje iz fizike '99 – 4. grupa
RJEŠENJA ZADATAKA

Zadatak 1 (16 bodova)

Slika:



(3 boda)

Aproksimacija tanke leće:
Biramo zraku koja prolazi kao na slici. Za tanku leću su kutevi β na ulazu zrake u leću i na izlazu iz nje su približno jednaki; pripadne visine h su također približno jednake; kutevi Θ na lijevoj i desnoj strani su približno jednaki. Također vrijedi:

$$R=\underline{C_1B_1}\approx\underline{C_1O}$$
$$R=\underline{C_2B_2}\approx\underline{C_2O}$$
$$\underline{A_1B_2}\approx\underline{A_1O}\equiv -x$$
$$\underline{A_2B_1}\approx\underline{A_2O}\equiv x'$$

Na temelju toga sa slike očitavamo (predznak uz x je stvar konvencije):

$$\mathrm{tg}(\gamma_1)\approx\frac{h}{-x},\ \mathrm{tg}(\gamma_2)\approx\frac{h}{x'},\ \sin(\Theta)\approx\frac{h}{R}$$

(3 boda)

Zakon loma:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\beta)}=\frac{n}{n_1},\quad \frac{\sin(\alpha_2)}{\sin(\beta)}=\frac{n}{n_2}$$

(1 bod)

Aproksimacija paraksijalnih zraka:
Jer su zrake paraksijalne, kutevi α_1, α_2, β, γ_1, γ_2, Θ su mali. Za neki mali kut ϕ vrijedi $\sin(\phi)\approx\phi$, $\mathrm{tg}(\phi)\approx\phi$. Odatle izvodimo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{n}{n_1}\approx\frac{\alpha_1}{\beta} &\Rightarrow \alpha_1=\frac{n}{n_1}\beta\\ \frac{n}{n_2}\approx\frac{\alpha_2}{\beta} &\Rightarrow \alpha_2=\frac{n}{n_2}\beta\end{aligned}\right\}\Rightarrow \alpha_1+\alpha_2=\left(\frac{n}{n_1}+\frac{n}{n_2}\right)\beta \qquad \text{(I)}$$

$$\gamma_1\approx-\frac{h}{x}$$
$$\gamma_2\approx\frac{h}{x'}$$
$$\Theta\approx\frac{h}{R}$$

(4 boda)

Iz slike slijedi:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = \gamma_1 + \Theta \\ \alpha_2 = \gamma_2 + \Theta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + 2\Theta \quad \text{(II)}$$

Vrijedi nadalje (kutevi s paralelnim kracima):

$$\Theta = \beta \quad \text{(III)}$$

(1 bod)

Kombiniranjem (I), (II), (III) slijedi:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} - 2\right)\Theta$$

Uvrštavanjem izraza za γ_1, γ_2, Θ izlazi (nakon dijeljenja jednadžbe s h):

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} - 2\right)\frac{1}{R},$$

odnosno za optičku moć:

$$J = \frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} - 2\right)\frac{1}{R} = 0.16\text{m}^{-1}$$

(3 boda)

Za leću u zraku ($n_1 = n_2 = 1$):

$$J_0 = \left(\frac{n}{n_1} - 1\right)\frac{2}{R} = 3.33\text{m}^{-1}$$

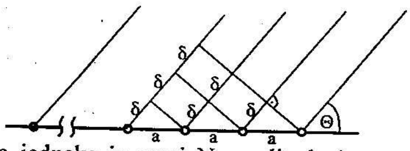
što znači da se stavljenjem leće u sredstvo optička moć smanji za $(J_0 - J)/J_0 = 95\%$.

(1 bod)

Zadatak 2 (20 bodova)

Radi se o 2 sustava od N=51 izvora, udaljenih međusobno za $a = \lambda/4$, smještenim jedan u drugi na udaljenosti $b = \lambda/5$. Najprije ćemo izračunati amplitudu svakog podsustava (one su iste, ali pomaknute u fazi), a zatim ih zbrojiti.

Amplituda podsustava N izvora:

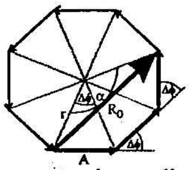


Amplituda podsustava jednaka je sumi N amplituda iznosa A od kojih je svaka pomaknuta u fazi za $\Delta\varphi$ u odnosu na prethodnu, gdje je:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}a\cos(\Theta) = \frac{\pi}{4}$$

(4 boda)

Sumu tih amplituda možemo prikazati poligonom od $k = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} = 8$ kuteva:



Suma vektora koji "napune" sve stranice poligona (njih 8) iznosi 0. Dakle, rezultantnoj amplitudi R_0 doprinosi

$$n = N - k \cdot \mathrm{Int}\left(\frac{N}{k}\right) = 51 - 8 \cdot 6 = 3$$

vektora koji preostanu nakon što se poligon određeni cijeli broj puta (6) "napunio".

Za poligon vrijedi:

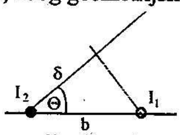
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= n \cdot \Delta\varphi \\ R_0 &= 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ A &= 2r\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_0 = A\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\Delta\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

Dakle,

$$R_0 = A\frac{\sin\left(n\pi\frac{a}{\lambda}\cos(\Theta)\right)}{\sin\left(\pi\frac{a}{\lambda}\cos(\Theta)\right)} = A\frac{\sin\left(3\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = 2.414 \cdot A$$

(8 bodova)

Rezultantna amplituda podsustava 1 i 2:
Oba podsustava titraju amplitudama iznosa R_0. Podsustav 2 brza u fazi za Δ pred podsustavom 1, pa od razlike faza, zbog geometrijskog hoda zrake δ, treba oduzeti Δ.

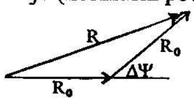


Ukupna razlika faza pri zbrajanju amplituda podsustava iznosi:

$$\Delta\psi = -\Delta + \frac{2\pi}{\lambda}\delta = -\Delta + \frac{2\pi}{\lambda}b\cos(\Theta) = -\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{15}$$

(4 boda)

Rezultantna amplituda je (kosinusni poučak):



$$R = 2R_0\cos\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)$$

$$R = 2A\frac{\sin\left(n\pi\frac{a}{\lambda}\cos(\Theta)\right)}{\sin\left(\pi\frac{a}{\lambda}\cos(\Theta)\right)}\cos\left(\pi\frac{b}{\lambda}\cos(\Theta)-\frac{\Delta}{2}\right)$$

$$= 2\cdot 2.414\cdot A\cos\left(\frac{\pi}{15}\right) \;=\; 4.723\cdot A$$

(4 boda)

Zadatak 3 (20 bodova)

Snaga koju zrači crno tijelo temperature T je $P=\sigma T^4 S$ (S je površina tijela). Zračenje s površine crnog tijela je disperzivno pa položaj kugle u ljusci nije bitan. Snaga koju zrači kugla je:

$$P_0=\sigma T^4 4\pi r^2. \qquad \text{(1 bod)}$$

To zračenje pada na unutrašnju stijenku šupljine i potpuno se apsorbira. Šupljina (jer je crno tijelo s obje strane) mora izračiti istu snagu koja je pala na nju, dio s unutrašnje stijenke (P_{in}) i dio s vanjske (P_{out}). Ti dijelovi proporcionalni su površini odgovarajuće stijenke.

$$\left.\begin{aligned} &P_0 = P_{in} + P_{out} \\ &\frac{P_{in}}{P_{out}} = \frac{S_{in}}{S_{out}} = \frac{R^2}{(\eta R)^2} = \frac{1}{\eta^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\begin{aligned} &P_{out} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1}P_0 \\ &P_{in} = \frac{1}{\eta^2+1}P_0 \end{aligned}\right.$$

(4 boda)

Zračenje koje izrači unutrašnja stijenka šupljine pada (disperzivno) opet na unutrašnjost šupljine i na malu kuglu. Dio koji padne na kuglu "otpada iz daljnje igre" jer kuglu održavamo na stalnoj temperaturi, a dio koji padne na stijenku šupljine biva opet apsorbiran i izračen dijelom unutra, a dijelom van u istom omjeru kao i u prvom koraku. Taj proces odvija se beskonačno koraka i predstavlja konvergentni red doprinosa koje treba zbrojiti.

1. korak:

Na ljusku iznutra padne zračenje

$$P_0^{(1)} = P_{in}\frac{S_{in}-S_{kugle}}{S_{in}} = P_{in}\frac{R^2-r^2}{R^2} = \frac{1}{\eta^2+1}P_0\frac{R^2-r^2}{R^2},$$

prema van se od toga izrači

$$P_{out}^{(1)} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1}P_0^{(1)} = \frac{\eta^2}{(\eta^2+1)^2}P_0\frac{R^2-r^2}{R^2},$$

a prema unutra

$$P_{in}^{(1)} = \frac{1}{\eta^2+1}P_0^{(1)} = \frac{1}{(\eta^2+1)^2}P_0\frac{R^2-r^2}{R^2}$$

(5 bodova)

2. korak:

$$P_0^{(2)} = P_{in}^{(1)} \frac{S_{in} - S_{kugle}}{S_{in}} = \frac{1}{\left(\eta^2+1\right)^2} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^2$$

$$P_{out}^{(2)} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0^{(2)} = \frac{\eta^2}{\left(\eta^2+1\right)^3} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^2$$

$$P_{in}^{(2)} = \frac{1}{\eta^2+1} P_0^{(2)} = \frac{1}{\left(\eta^2+1\right)^3} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^2$$

3. korak:

$$P_0^{(3)} = P_{in}^{(2)} \frac{S_{in} - S_{kugle}}{S_{in}} = \frac{1}{\left(\eta^2+1\right)^3} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^3$$

$$P_{out}^{(3)} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0^{(3)} = \frac{\eta^2}{\left(\eta^2+1\right)^4} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^3$$

$$P_{in}^{(3)} = \frac{1}{\eta^2+1} P_0^{(3)} = \frac{1}{\left(\eta^2+1\right)^4} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^3$$

$$\vdots$$

n-ti korak:

$$P_0^{(n)} = \frac{1}{\left(\eta^2+1\right)^n} P_0 \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^n$$

$$P_{out}^{(n)} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0 \frac{1}{\left(\eta^2+1\right)^n} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^n$$

$$P_{in}^{(n)} = \frac{1}{\eta^2+1} P_0 \frac{1}{\left(\eta^2+1\right)^n} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2}\right)^n$$

(5 bodova)

Ukupna izračena snaga van je suma svih doprinosa:

$$P_{OUT} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{out}^{(n)}$$

$$= \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\eta^2+1} \frac{R^2 - r^2}{R^2} + \left(\frac{1}{\eta^2+1} \frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{\eta^2+1} \frac{R^2 - r^2}{R^2} \right)^n + \ldots \right\}$$

$$= \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad , \qquad q \equiv \frac{1}{\eta^2+1} \frac{R^2 - r^2}{R^2} < 1$$

Suma u gornjem rezultatu je konvergentni geometrijski red ($q<1$) čija suma iznosi $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pa dobivamo

$$P_{OUT} = \frac{\eta^2}{\eta^2+1} P_0 \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\eta^2+1}\dfrac{R^2-r^2}{R^2}}$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo traženi omjer:

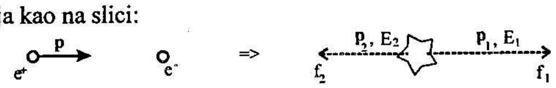
$$\frac{P_{OUT}}{P_0} = \frac{(\eta R)^2}{(\eta R)^2 + r^2} = \frac{R_{out}^2}{R_{out}^2 + r^2} \quad , \quad R_{out} \equiv \eta R$$

Iz gornjeg rezultata se vidi da snaga izračena van ovisi samo površini vanjske stijenke ljuske. Ljusku nazivamo radijacijskim štitom jer smanjuje snagu izračenu u vanjski prostor (za gore izračunati faktor).

(5 bodova)

Zadatak 4 (14 bodova)

Proces se odvija kao na slici:



(1 bod)

ZSE: $E_{TOT}^{(prije)} = E_{TOT}^{(poslije)}$

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 = E_1 + E_2$$

(3 boda)

ZSI: $p_{TOT}^{(prije)} = p_{TOT}^{(poslije)}$

$$p = \frac{E_1}{c} - \frac{E_2}{c}$$

(3 boda)

Kombinacijom ZSI i ZSE nalazimo:

$$E_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 + pc\right]$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 - pc\right]$$

(3 boda)

Iz zadanih podataka treba odrediti impuls pozitrona p (on definira rješenje). Izjednačimo Lorentzovu silu (izraz vrijedi u relativističkoj fizici) s centripetalnom (paziti na relativističku promjenu mase):

$$qvB = \gamma m \frac{v^2}{R} \quad , \quad \gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Relativistički impuls je:

$$p \equiv \gamma m v = qBR$$

$$p = 5.6 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s} = 1.05 \text{ MeV/c}$$

Izravnim uvrštavanjem u izraze za energije fotona slijedi:

$$E_1 = 1.36 \text{ MeV}$$
$$E_2 = 0.32 \text{ MeV}$$

(4 boda)

DN– 1999. g.

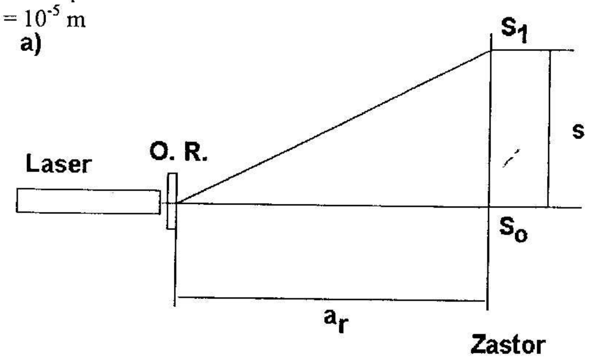
Rješenje eksperimentalnog zadatka 4. grupe

ODREĐIVANJE DEBLJINE UZORAKA

$\lambda = \dfrac{d \cdot s}{k \cdot a_r}$;   k = 1, 2, 3, ... red spektra

$d = 10^{-5}$ m

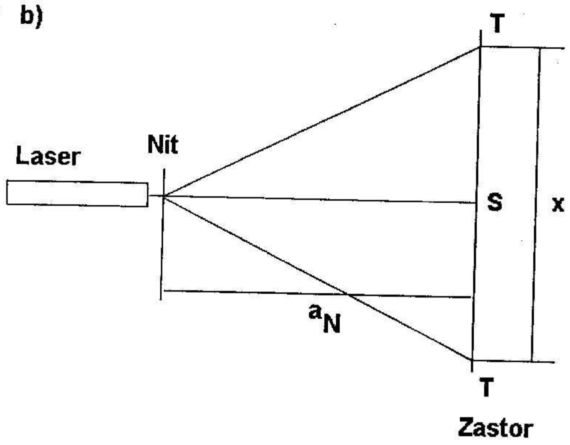
a)



a_r - udaljenost rešetke i zastora

s - udaljenost do maximuma

b)



d_N - debljina niti

x - udaljenost tamnih pruga

a_N - udaljenost niti i zastora

$\lambda = \dfrac{d_N \cdot x}{a_N}$

(5 bodova)

Korištenjem laserskog snopa u oba ogiba λ se eliminira i dobivamo relaciju za debljinu niti, d_N, uz uvjet da je $a_r = a_N$;

$$d_N = \frac{d \cdot s}{k \cdot x}$$

ako kod rešetke u postupku uzimamo spektar prvog reda, (k = 1),

$$d_N = 10^{-5} \cdot \frac{s}{x}$$

(5 bodova)

2) Izmjereni podaci i izračun debljine niti 1 i 2. (4+2 boda)

3) Nepoznato sredstvo - uzorak je tkanje za sito tisak - dvostruka optička rešetka karakteristična veličina je konstanta rešetke, d_x, - gustoća tkanja.

Ako pri mjerenju udaljenost poznate rešetke i zastora je jednaka udaljenosti uzorka i zastora i spektar 1. reda u obadva slučaja, slično gornjem izvodu dobivamo za gustoću tkanja relaciju:

$$d_x = 10^{-5} \cdot \frac{s}{s_x}$$

(4 boda)

Izmjereni podaci i izračun gustoće tkanja. (4+2 boda)