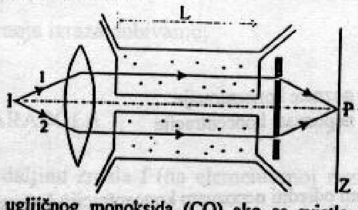
Državno natjecanje iz fizike 2000. – 4. grupa

Zadatak 1 (20 bodova)

Cilindrična posuda s tekućinom rotira konstantnom kutnom brzinom ω oko svoje osi uslijed čega površina tekućine poprima konkavan oblik. Odredi krivulju koju slijedi površina tekućine i žarišnu daljinu takvog "zrcala" ako nam je poznata činjenica da sve zrake svjetlosti, koje upadnu paralelno s osi rotacije, bivaju fokusirane u jednoj točki.

Zadatak 2 (20 bodova)

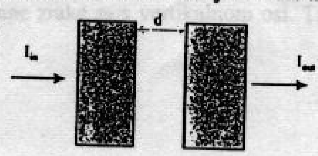
Slika shematski prikazuje interferencijski uređaj za mjerenje indeksa loma plinova i tekućina. Svjetlost iz izvora valne duljine λ=589nm prolazi kroz dvije jednake cijevi ispunjene zrakom (indeks loma n_z=1.000293) duljine L=10cm. Iza njih se nalazi dijafragma s dvije pukotine koje daju interferentnu sliku na zastoru Z.



a) Odredi indeks loma ugljičnog monoksida (CO) ako se svjetla interferencijska pruga pomakne za k=7 međusobnih razmaka kada u jednu cijev umjesto zraka stavimo CO.
b) Kolika je minimalna razlika indeksa loma dvije tvari u cijevima koju je moguće odrediti ovim uređajem?
c) Ako se u obje cijevi nalazi voda (n_v=4/3), odredi minimalnu brzinu v kojom se voda u jednoj od cijevi treba gibati (u smjeru širenja svjetlosti) da bi se u točki P (os simetrije) na zastoru pojavila destruktivna interferencija. Uzmi da se voda giba jednoliko duž cijele duljine L, da je brzina gibanja vode mnogo manja od brzine svjetlosti $c=3\cdot10^8$m/s, te da vrijedi aproksimacija $(1+x)^{-1}\approx 1-x$, $x<<1$.

Zadatak 3 (20 bodova)

Interferometar Fabry-Perot sastoji se od dvije paralelne ravne ploče razmaknute za mali razmak d između kojih se nalazi vakuum. Svaka ploča propušta dio određen faktorom T^2, a reflektira dio R^2 upadnog intenziteta svjetlosti (apsorpciju zanemarujemo). Refleksije svjetlosti koje fizikalno uzimamo u obzir odvijaju se između ploča. Ako s lijeve strane na uređaj pada svjetlost valne duljine λ i intenziteta I_{in}, odredi intenzitet I_{out} koji s desne strane izlazi iz uređaja.
(Uputa: Intenzitet je kvadrat apsolutne vrijednosti amplitude vala. Amplitude valova pomaknutih u fazi najlakše je zbrojiti ako ih predstavimo vektorima u ravnini kompleksnih brojeva).



Zadatak 4 (10 bodova)

Da bi odredili ukupni volumen krvi pacijenta, liječnici mu u krvotok ubrizgaju određenu količinu radioaktivnog nuklida konstantne raspada $\lambda=2.5\cdot10^{-4}s^{-1}$. Nakon vremena od τ=2h, kada se nuklid jednoliko rasporedio po krvotoku, izvade mu uzorak krvi volumena v=10cm^3 i mjerenjem ustanove da je radioaktivna aktivnost tog uzorka za faktor $\eta=2.76\cdot10^{-4}$ puta manja od početne aktivnosti ukupne količine nuklida prije ubrizgavanja. Koliki je ukupni volumen krvi pacijenta? Pretpostavi da je volumen ubrizganog nuklida zanemariv prema ukupnom volumenu krvi.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2000. - 4. grupa
Eksperimentalni zadatak

ODREĐIVANJE KONCENTRACIJE VODENE OTOPINE ŠEĆERA

Pribor:

- plitka posuda
- izvor svjetlosti
- polarizator
- ravnalo
- dva stalka
- čaša s vodom
- čaša s otopinom poznate koncentracije
- čaša s otopinom nepoznate koncentracije

Zadatak:

Zadanim priborom odrediti nepoznatu koncentraciju šećera.

a) objasni postupak i izvedi potrebne relacije za određivanje tražene veličine (12 bodova)

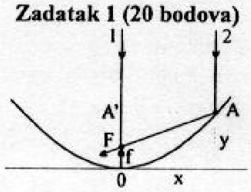
b) mjerenjem odredi tražene veličine (10 bodova)

c) prikaži grafički ovisnost mjerenih veličina (8 bodova)

Ukupno 4. eksperimentalni zadatak: 30 bodova

Državno natjecanje iz fizike 2000. – 4. grupa
RJEŠENJA ZADATAKA

Zadatak 1 (20 bodova)



(3 boda)

Da bi se fokusirale u istoj točki (F), zrake 1 i 2 moraju tamo stići u istom trenutku. To znači da za prijeđene puteve mora vrijediti:

$$|A'O| + |OF| = |AF|$$

$$y + f = \sqrt{(y-f)^2 + x^2}$$

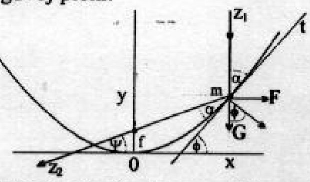
Nakon kvadriranja i reduciranja izraza dobivamo:

$$y = \frac{1}{4f}x^2$$

Traženi oblik krivulje je PARABOLA.

(5 bodova)

Da bismo odredili žarišnu daljinu zrcala f (na elementarnoj razini), promatrat ćemo refleksiju zrake z_1 na njegovoj plohi.



Nagib ϕ tangente na plohu t određen je ravnotežom sila koje djeluju na česticu tekućine (gravitacijska **G**, centrifugalna F_{cf}, sila među česticama tekućine) pa je na udaljenosti x od ishodišta:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2}{g}x \qquad \text{(4 boda)}$$

Položaj fokusa određen je presjecištem reflektirane zrake z_2 s vertikalnom osi. Treba odrediti jednadžbu pravca te zrake:

$$y - y_0 = k\cdot(x - x_0) \Rightarrow \qquad y = k\cdot x + y_0 - k\cdot x_0$$

$$k = \mathrm{tg}\,\Psi$$

Sa slike očitavamo:

$$\left.\begin{aligned} \varphi + \alpha &= \frac{\pi}{2} \\ \Psi + \alpha + \pi - \varphi &= \pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Psi = 2\varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$k = \mathrm{tg}\,\Psi = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,2\varphi} = \frac{\mathrm{tg}^2\varphi - 1}{2\mathrm{tg}\,\varphi} \qquad \text{(4 boda)}$$

Znamo da z_2 prolazi točkom (0,f) pa je njena jednadžba:

$$y = k\cdot x + f$$

Usporedbom s općim oblikom jednadžbe proizlazi da je:

$$f = y_0 - k \cdot x_0$$

Uvrštavanjem izraza za k i tg ϕ (u točki $x=x_0$) dobivamo:

$$f = \underbrace{y_0 - \frac{\omega^2}{2g}x_0^2}_{=0} + \frac{g}{2\omega^2}$$

Suma prva dva člana mora isčeznuti jer se u njoj nalazi ovisnost o koordinatama točke na zrcalu u kojoj se zraka reflektira, a po pretpostavci zadatka sve zrake se sjeku u 1 fokusu neovisno o točki u kojoj pogode zrcalo.

(Uočimo da iz tog uvjeta direktno možemo očitati oblik krivulje zrcala i bez postupka s početka zadatka: $y = (\omega^2/2g)x^2$.)

Dakle, žarišna daljina iznosi:

$$f = \frac{g}{2\omega^2} \qquad \text{(4 boda)}$$

Napomena: Gore izneseno rješenje dobiveno je korištenjem elementarne matematike. Čak je i uvjet o prolasku svih zraka kroz 1 fokus dan iz istog razloga. Osnovno poznavanje infinitezimalnog računa omogućilo bi nalaženje rješenja "u nekoliko redaka" tj. direktno iz poznavanja nagiba tangente na krivulju zrcala (prva derivacija krivulje $y'(x) = \text{tg}\ \phi = (\omega^2/g)x$ je koeficijent smjera tangente u točki x) mogli bi integriranjem naći funkcijsku ovisnost same krivulje zrcala ($y = \int y'(x)dx = \int(\omega^2/g)xdx = (\omega^2/2g)x^2$).

Zadatak 2 (20 bodova)

a) Razlika optičkih puteva zrake 1 i 2:

$$\delta = L\cdot(n-n_z), \quad \delta = k\lambda$$

Pomak od k=7 razmaka prouzročen je razlikom indeksa loma ugljičnog monoksida n i zraka n_z. Indeks loma ugljičnog monoksida je:

$$n = n_z + (k\lambda/L) = 1.000293 + 0.000041 = 1.000334 \qquad \text{(4 boda)}$$

b) Najmanjoj mjerljivoj razlici indeksa loma odgovara situacija kada se u točki P interferentna slika promjeni iz svjetle u tamnu tj. postigne fazna razlika π odnosno razlika optičkih puteva $\lambda/2$ pa je:

$$\Delta n_{min} = \lambda/2L = 3\cdot 10^{-6} \qquad \text{(4 boda)}$$

Vidimo da je osjetljivost veća što je cijev uređaja dulja, a valna duljina svjetlosti manja.

c) Neka u cijevi 1 voda miruje – brzina širenja svjetlosti je $c_1 = c/n_v$. U cijevi 2 voda se giba brzinom v – brzina širenja svjetlosti dobiva se relativističkim zbrajanjem brzina:

$$c_2 = \frac{\dfrac{c}{n_v} + v}{1 + \dfrac{\dfrac{c}{n_v} v}{c^2}} = \left(\frac{c}{n_v} + v\right)\left(1 + \frac{v}{n_v c}\right)^{-1} \qquad \text{(3 boda)}$$

Jer je v<<c, koristimo aproksimaciju $\left(1 + \dfrac{v}{n_v c}\right)^{-1} \approx 1 - \dfrac{v}{n_v c}$ pa slijedi:

$$c_2 = \left(\frac{c}{n_v} + v\right)\left(1 - \frac{v}{n_v c}\right) = \frac{c}{n_v} + v - \frac{v}{n_v^2} - \frac{v^2}{n_v c} \approx \frac{c}{n_v} + v\left(1 - \frac{1}{n_v^2}\right),$$

gdje smo iz istog razloga zanemarili član s v^2. (2 boda)

Prolaskom kroz medij ne mijenja se frekvencija već valna duljina svjetlosti pa vrijedi:

$$c_1 = \lambda_1 \nu\ , \ \ c_2 = \lambda_2 \nu$$

Fazna razlika zraka 1 i 2 nastaje zbog $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i iznosi:

$$\Delta\varphi = 2L\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \qquad \text{(3 boda)}$$

Uvrštavanjem gornjih izraza dobivamo:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\dfrac{c}{n_v} + \dfrac{v}{n_v^2}\left(n_v^2 - 1\right) - \dfrac{c}{n_v}}{\dfrac{c}{n_v}\left(\dfrac{c}{n_v} - \dfrac{v}{n_v^2}\left(n_v^2 - 1\right)\right)} L\nu$$

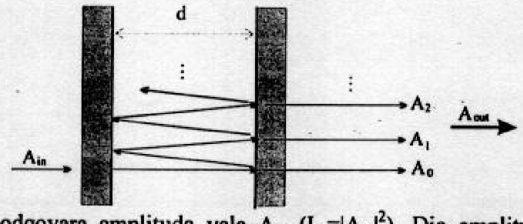
Zanemarenjem 2. člana (~v) u zagradi u nazivniku koji je puno manji od 1. (~c), redukcijom brojnika te korištenjem veze izvorne valne duljine izvora i frekvencije $\lambda = c/\nu$ dolazimo do izraza:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{L}{\lambda} \frac{v}{c}\left(n_v^2 - 1\right) \qquad \text{(4 boda)}$$

Pojavi prve destruktivne interferencije odgovra fayna raylika $\Delta\phi = \pi$ pa je:

$$v = \frac{c\lambda}{2L\left(n_v^2 - 1\right)} = 1136\,\text{m/s} \qquad \text{(2 boda)}$$

Zadatak 3 (20 bodova)



Upadnom intenzitetu odgovara amplituda vala A_{in} ($I_{in} = |A_{in}|^2$). Dio amplitude koji ploča propušta dobije se množenjem upadne faktorom T, a reflektirani faktorom R. U izlazni val doprinose, uz direktno transmitirani dio amplitude A_0, i zrake reflektirane 2, 4, 6,... puta (označene s A_1, A_2, A_3,...). Treba voditi računa da su valovi 1, 2, 3,... fazno pomaknuti u odnosu na referentni val 0 jer prelaze dodatni put duljine 2d, 4d, 6d,...

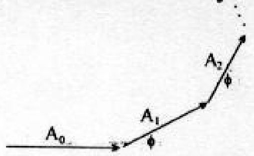
(5 bodova)

Označimo i-ti izlazni val s $Y_i = (A_i, \Delta\Psi_i)$ gdje je A_i njegova amplituda, a $\Delta\Psi_i$ njegov fazni pomak u odnosu na referentni izlazni val i=0.

$$A_0 = TTA_{in} \quad = T^2A_{in}; \qquad \Delta\Psi_0 = 0$$
$$A_1 = TRRTA_{in} = T^2R^2Ain; \qquad \Delta\Psi_1 = \phi$$
$$A_2 = T\,R^2R^2TAin = T^2\,R^4A_{in}; \qquad \Delta\Psi_2 = 2\,\phi$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$A_n = T^2R^{2n}A_{in}; \qquad \Delta\Psi_n = n\,\phi; \qquad \phi = 4\pi d/\lambda$$

(5 bodova)

Da bismo dobili intenzitet izlaznog vala, treba naći kvadrat apsolutne vrijednosti sume fazno pomaknutih amplituda A_i. Sumaciju je najlakše provesti prikažemo li amplitude A_i kompleksnim brojevima (jer oni sadrže informaciju o amplitudi i fazi).



$$A_{out} = A_0 + A_1e^{i\phi} + A_2e^{2i\phi} + \ldots + A_ne^{ni\phi} + \ldots$$
$$A_{out} = T^2A_{in}[1 + R^2e^{i\phi} + R^4e^{i\phi} + R^4e^{2i\phi} + \ldots + R^{2n}e^{ni\phi} + \ldots]$$
$$A_{out} = T^2A_{in}\sum_{n=0}^{\infty}\left(R^2e^{i\varphi}\right)^n$$

(5 bodova)

U gornjem izrazu figurira konvergentni geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, $q = R^2e^{i\phi} < 1$ jer je $R^2<1$ (vrijedi $R^2+T^2=1$) i $1 \geq |e^{i\phi}|$.

$$A_{out} = \frac{T^2}{1-R^2e^{i\varphi}}A_{in}$$

Izlazni intenzitet:

$$I_{out} = |A_{out}|^2 = A_{out}A^*_{out}$$
$$= \frac{T^4}{\left(1-R^2e^{i\varphi}\right)\left(1-R^2e^{-i\varphi}\right)}|A_{in}|^2$$
$$= \frac{T^4}{1+R^4-R^2\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)}I_{in}$$
$$= \frac{T^4}{1+R^4-2R^2\cos\varphi}I_{in}$$
$$I_{out} = \frac{T^4}{1+R^4-2R^2\cos\left(4\pi\frac{d}{\lambda}\right)}I_{in}$$

(5 bodova)

Zadatak 4 (10 bodova)

Radioaktivni raspad:
$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ – broj čestica u radioaktivnom uzorku
$A(t) = -dN/dt = \lambda N(t)$ – aktivnost uzorka

Nakon vremena $t=\tau$, aktivnost iznosi $A(\tau)=A_0 e^{-\lambda\tau}$.

(4 boda)

Kada se nuklid homogeno rasporedi po krvotoku, aktivnost uzorka krvi po jedinici volumena iznosi u trenutku t: $A(t)/V$. Nakon vremena τ od ubrizgavanja vrijedi:

$$\frac{A_0 e^{-\lambda t}}{V} = \frac{a}{v}$$

gdje je a aktivnost izvađenog uzorka krvi volumena v.
Kako je $a=\eta A_0$, proizlazi:

$$V = v\frac{e^{-\lambda\tau}}{\eta} = 5989\text{cm}^3 \approx 6\text{L}$$

(6 bodova)

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2000. - 4. grupa
Rješenje eksperimentalnog zadataka

ODREĐIVANJE KONCENTRACIJE VODENE OTOPINE ŠEĆERA

a) Tražena veličina je koncentracija. Kako postoje tri otopine, (otopina bez šećera, otopina s poznatom koncentracijom šećera i otopina s nepoznatom koncentracijom šećera), potrebno je pomoću Brewsterova zakona, metodom polarizacije odrediti indeks loma, n, svakog uzorka.
Poznato je da se n povećava proporcionalno povećanjem koncentracije otopine.
Prema Brewsterovom zakonu je: (6 bodova)

$n = \mathrm{tg}\alpha$

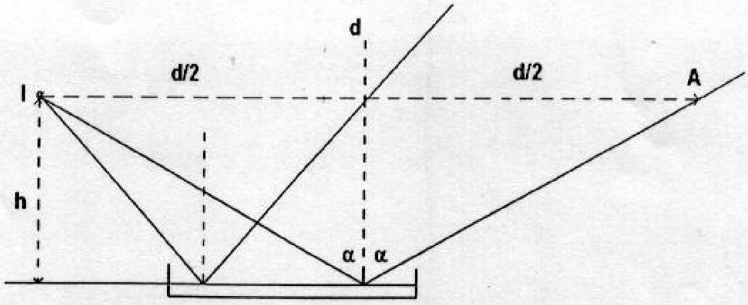
$n \approx c, \quad n = k \cdot c$

te je za $c=0 \quad \Rightarrow \quad n_0 = 1{,}33$

c_1 (recimo 10%, ili g/ml) $\Rightarrow$ n_1

c_2 (nepoznat) $\Rightarrow$ n_2 (6 bodova)

b) određivanje n



$n = \mathrm{tg}\alpha$

$$n = \frac{d/2}{h}$$ (6 bodova)

Izvor svjetlosti je na visini h (oko 30 cm), a polaroidd A_1 u položaju u kojem ga zakrećemo i promatramo reflektiranu zraku tako dugo dok svjetlost ne bude minimalna. time smo odredili međusobni položaj polarizatora tekućinei analizatora A. Nakon toga odmičemo stalak s polarizatorom A u položaj u kojem slika izvora biti minimalna. Za ovajpoložaj vrijedi,

$$n = \frac{d/2}{h}$$ **(4 boda)**

Za svaki uzorak potrebno je odrediti indeks loma n.

c) rezultate mjerenja treba prikazati u n-c dijagramu i iz grafa odrediti nepoznatu koncentraciju c. **(5 bodova)**
Nepoznata koncentracija c_3=22%. **(3 boda)**