

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE 2000 – 4. grupa

Zadatak 1 (10 bodova)

Poznato svojstvo sfernih zrcala je sferna aberacija, pojava da paralelan snop zraka svjetlosti ne biva fokusiran u jednoj točki već na dužini nazvanoj koma na optičkoj osi zrcala. Odredi omjer duljine kome i žarišne daljine konkavnog sfernog zrcala za koje omjer radijusa otvora zrcala i radijusa zakrivljenosti plohe iznosi $r/R = 0.2$.

Zadatak 2 (12 bodova)

Michelsonov interferometar, jedan od prvih uređaja kojim je eksperimentalno potvrđena specijalna teorija relativnosti (Michelson-Morley, 1887.) shematski je prikazan na slici. Točkasti izvor svjetlosti $\lambda=633\text{nm}$ udaljen je za $L_1=30\text{cm}$ od polupropusnog zrcala Z zanemarive debljine postavljenog pod kutem od 45° u odnosu na zrcala Z_1 i Z_2 koja međusobno zatvaraju pravi kut. Zrcala Z_1 i Z_2 udaljena su od Z za točno istu udaljenost $L=25\text{cm}$, a zastor S, na kojem promatramo interferencijske prstenove, udaljen je od Z za $L_2=20\text{cm}$. Odredi udaljenost d za koju moramo odmaknuti Z_1 od Z da se na zastoru formira prvi svjetli prsten radijusa $r=2\text{cm}$ oko svjetlog centra. Udaljenost d može se smatrati puno manjom od L, L_1, L_2 .



Zadatak 3 (10 bodova)

Određena količina sapunice tvori opnu na kvadratnom žičanom okviru stranice $a=10\text{cm}$ nagnutim pod kutem $\alpha=10^\circ$ u odnosu na horizontalu. Jedna stranica okvira je pomična na način da njenim pomicanjem okvir ostaje pravokutnik (slika). U početnom trenutku, gledano okomito na opnu u transmitiranoj bijeloj svjetlosti, boja opne je crvena ($\lambda=650\text{nm}$). Nakon koliko vremena će, pustivši pomičnu stranicu da se slobodno giba, opna poprimiti modru boju ($\lambda=450\text{nm}$) u istom redu interferencije? Indeks loma sapunice ovisi o valnoj duljini svjetlosti na način $n(\lambda) = A e^{B\lambda}$, $n(380\text{nm})=1.6365$ i $n(760\text{nm})=1.4476$. Zanemari otpor koji rastezanje opne pruža gibanju stranice i pretpostavi da je debljina opne ista na cijelom okviru.



Zadatak 4 (9 bodova)

Idealno crno tijelo mase $m=1.42\text{kg}$ oblika kocke izrađene od homogenog materijala specifičnog toplinskog kapaciteta $C=1.00\text{Jg}^{-1}\text{K}^{-1}$ smješteno je na čvrstoj, toplinski izoliranoj podlozi. Kocka je obasjana sunčevim zračenjem okomitim na izloženu plohu kroz dijafragmu površine $S=1\text{dm}^2$ tako da sva propuštena svjetlost padne na plohu kocke.

- Za koliko će se promijeniti temperatura kocke za vrijeme $t=15\text{min}$ od početka izlaganja zračenju?
- Ako uzmemo u obzir termalno rastezanje materijala, hoće li temperatura kocke biti viša, niža ili ista kao u (a)? Obrazloži!

Zadano je: polumjer Sunca $R_S=6.95\cdot 10^8\text{m}$, temperatura na površini Sunca $T=6000\text{K}$, udaljenost Zemlje od Sunca $d=150\cdot 10^6\text{km}$, Stefan-Boltzmanova konstanta $\sigma=5.67\cdot 10^{-8}\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.

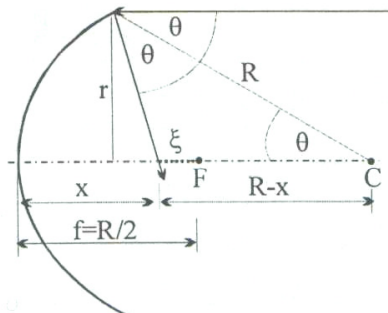
Zadatak 5 (9 bodova)

Kvantne žice (quantum wires) važan su pojam u modernoj fizici niskodimenzionalnih sustava. Radi se o sustavima gdje je gibanje elektrona ograničeno samo na jednu dimenziju. Neka se elektron slobodno giba zatvoren u kvantnoj žici duljine $L=1\text{nm}$ od čijih se krajeva savršeno elastično odbija. Koristeći de Brogliev princip dualnosti val-čestica odredi dozvoljene energije kvantnih stanja u kojima se elektron može nalaziti. Izračunaj numeričku vrijednost u eV osnovnog i prva 4 pobuđena stanja ako je zadana masa elektrona $m=9.1\cdot 10^{-31}\text{kg}$ i $\hbar=1.055\cdot 10^{-34}\text{Js}$.

Rješenja zadataka 4. grupe i smjernice za bodovanje

Zadatak 1 (10 bodova)

Slika:



(3 boda)

Sa slike očitavamo (nastojimo sve izraziti preko zadanog omjera r/R):

$$\sin \theta = r/R$$

Iz sinusnog poučka za trokut s vrhovima u točkama C, F i rubu zrcala slijedi:

$$\frac{R-x}{R} = \frac{\sin \theta}{\sin(\pi-2\theta)} = \frac{1}{2 \cos \theta} \Rightarrow x = \frac{R}{2} \left(2 - \frac{1}{\cos \theta} \right)$$

Povezavši gornje dvije relacije preko $\cos \theta = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2}$ dobivamo:

$$x = \frac{R}{2} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \right)$$

Žarišna daljina sfernog zrcala definira se za paraksijalne zrake i iznosi $f=R/2$, a duljina kome je $\xi=R/2-x$ pa je relativan omjer:

$$\frac{\xi}{f} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} - 1 = 0.0206$$

(7 bodova)

Napomena: Za mali r/R može se upotrijebiti $(1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} x^2$ pa je

$$\frac{\xi}{f} \approx \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} = 0.02$$

Primjenom gornje aproksimacije na izraz za x dobiva se

$$x \approx \frac{R}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} \right).$$

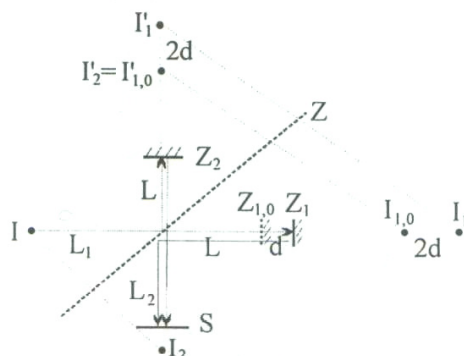
Za paraksijalne zrake je $(r/R)^2 \ll 1$ i odatle se direktno vidi da je $x \approx R/2 = f$ tj. da koma iščezava.

Zadatak 2 (12 bodova)

Dijeljenjem svjetlosti iz I na polupropusnom zrcalu formiraju se dva virtualna izvora 1 i 2 koji se potom pomoću Z_1 i Z_2 dovode na istu os. Odmicanjem Z_1 za d , prvotna slika I_1 odmiče se za $2d$. Time je problem Michelsonovog interferometra sveden na problem interferencije 2 točkasta izvora udaljena za $2d$ gdje je ravnina interferencije okomita na os koja prolazi kroz oba izvora pa su rotacijski hiperboloidi konstantne

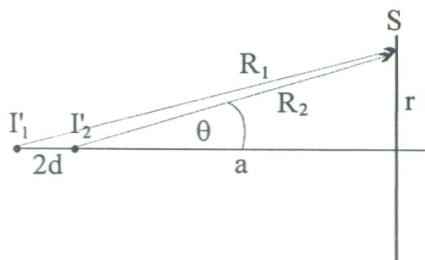
fazne razlike presječni zastorom okomito na os rotacije te na njemu formiraju koncentrične interferencijske prstenove (za razliku od “školskog” primjera gdje je zastor paralelan osi kroz izvore pa su hiperboloidi presječeni tako da se, za dovoljno mali zastor, interferencijska slika sastoji os ekvidistantnih pruga).

Slika 1:



(2 boda)

Slika 2:



(2 boda)

Pažljivim očitavanjem sa slike nalazimo udaljenost a:

$$a = L_1 + L_2 + 2L = 1\text{m}$$

Nadimo razliku optičkih puteva:

$$R_1^2 = (a+2d)^2 + r^2$$

$$R_2^2 = a^2 + r^2$$

$$R_1^2 - R_2^2 = 4ad + 4d^2$$

Gornju razliku raspišemo kao $R_1^2 - R_2^2 = (R_1 - R_2)(R_1 + R_2)$ gdje je $\delta = (R_1 - R_2)$ tražena razlika optičkih puteva, a $(R_1 + R_2) \approx 2R$ gdje je $R \approx R_1 \approx R_2$. Napomenimo da se $R_1 + R_2$ nije smjelo aproksimirati s $2a$ jer bi time dobili samo uvjet za točku na osi ($r=0$). Član $d^2 \ll ad$ pa ga zanemarujemo. Nakon navedenih aproksimacija dolazimo do izraza:

$$\delta = 2d \frac{a}{R} = 2d \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = 2d \cos \theta \quad (4 \text{ boda})$$

(Napomena: Moglo se poći od pretpostavke da zbog $d \ll a$ zrake putuju gotovo paralelno te odmah napisati gornji izraz u obliku $\delta = 2d \cos \theta$.)

Za svjetle prstenove je $\delta = k\lambda$. Treba odrediti kojem k pripada prvi svjetli prsten na zastoru (taj $k \neq 1$ jer $k=1$ odgovara 1. svjetloj prugi na zastoru paralelnom s osi kroz izvore). Traženi k odgovara maksimalnom redu $k_{\max}$ umanjenom za 1, gdje c odgovara točki na osi – svjetlom centru prstenova; $r = 0$ ili $\theta = 0$.

$$k_{\max} \lambda = 2d$$

$$k = k_{\max} - 1 = 2d/\lambda - 1$$

Uvrštavanjem uvjeta za svjetle prstenove i reda interferencije koji odgovara 1. svjetlom prstenu nalazimo:

$$d = \frac{\lambda}{2 \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right)} = 1.58 \text{ mm} \quad (4 \text{ boda})$$

Zadatak 3 (10 bodova)

Za svjetlu opnu debljine d u transmitiranoj svjetlosti vrijedi:

$$2d n(\lambda) = k\lambda$$

Iz uvjeta u početnom trenutku (crvena boja) odredimo red interferencije:

$$k = \frac{2d_1 n_1}{\lambda_1}$$

Za modru opnu vrijedi:

$$2d_2 n_2 = k\lambda_2$$

Kako je $\lambda_2 < \lambda_1$, razvlačenjem opne tj. njenim stanjivanjem možemo postići konstruktivnu interferenciju istog reda k .

Iz gornje dvije relacije slijedi relacija koja povezuje debljine modre i crvene opne:

$$d_2 = \frac{n_1 \lambda_2}{n_2 \lambda_1} d_1 \quad (4 \text{ boda})$$

Volumen sapunice je očuvan klizanjem jedne stranice okvira (niz kosinu) pa vrijedi:

$$V = a^2 d_1 = a \left(a + \frac{g \sin \alpha}{2} t^2 \right) d_2 \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \sin \alpha} \left(\frac{n_2 \lambda_1}{n_1 \lambda_2} - 1 \right)} \quad (3 \text{ boda})$$

(t je vrijeme nakon kojeg se postigne konstruktivna interferencija za λ_2).

Odredimo indekse loma n_1, n_2 (uvrstimo poznate vrijednosti i formiramo sustav jednačbi za koeficijente A i B):

$$\ln 1.6365 = \ln A + 380 B$$

$$\ln 1.4476 = \ln A + 760 B$$

$$A = 1.85$$

$$B = -3.2277 \cdot 10^{-4} \text{ nm}^{-1}$$

Iz izraza za ovisnost indeksa loma o λ dobivamo:

$$n_1 = n(650 \text{ nm}) = 1.5$$

$$n_2 = n(450 \text{ nm}) = 1.6$$

što uvrštavanjem u izraz za t konačno daje:

$$t = 0.25 \text{ s}$$

(3 boda)

Zadatak 4 (9 bodova)

a) Neka je Q količina topline koju primi kocka, a Q_s količina topline koju Sunce izrači u istom vremenu. Vrijedi:

$$\frac{Q}{Q_s} = \frac{S}{4d^2\pi}$$

$$Q_s = I \cdot 4R_s^2\pi \cdot t$$

$$I = \sigma T^4$$

$$Q = \frac{R_s^2}{d^2} \sigma T^4 S t$$

Toplina Q troši se na zagrijavanje tijela $Q = m C \Delta T$. Promjena temperature je:

$$\Delta T = \frac{1}{mC} \frac{R_s^2}{d^2} \sigma T^4 S t = 10K \quad (6 \text{ bodova})$$

b) Prema 1. zakonu termodinamike uložena toplina troši se na povećanje unutrašnje energije (povećanje temperature) i obavljanje mehaničkog rada. Ako se uzme u obzir termalno rastezanje tijela, stranice se izdužuju i time obavljaju mehanički rad na podizanje težišta tijela jer se ono nalazi na čvrstoj podlozi ($W = mgh$, $h = (a-a_0)/2$ gdje je a duljina stranice). Površina koja je obasjana zračenjem je stalno konstantna (dijafragma) pa će konačna promjena temperature biti manja nego u (a) slučaju.

(3 boda)

Zadatak 5 (9 bodova)

Gibanje elektrona u zadatku si slikovito možemo predložiti kao gibanje loptice mase m između dva zida udaljenih za L od kojih se loptica elastično odbija. Zidovi predstavljaju beskonačni potencijalni bedem za elektron. Po de Broglievom principu, dozvoljene staze elektrona su one za koje se na duljini L formira cijeli broj polovina valne duljine:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(4 boda)

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Elektron se u potencijalnoj jami giba slobodno, njegova energija je

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (2 \text{ boda})$$

Kombiniranjem gornje tri relacije dolazimo do izraza za dozvoljene energije stanja elektrona u opisanom sustavu:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Energije prvih 5 stanja (osnovno i 4 pobuđena):

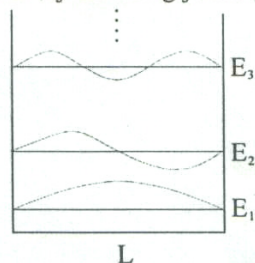
$$E_1 = 0.377 \text{ eV}$$

$$E_2 = 1.508 \text{ eV}$$

$$E_3 = 3.393 \text{ eV}$$

$$E_4 = 6.032 \text{ eV}$$

$$E_5 = 9.425 \text{ eV}$$



(3 boda)