

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2003. - 4. grupa

Zadatak 1 (20 bodova)

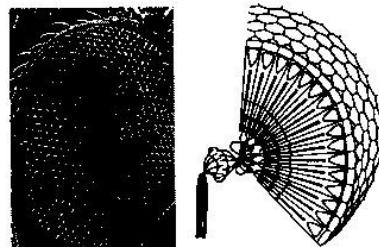
Mnoge zvijezde na nebu su dvojne zvijezde, iako ih takvima ne vidimo. Kod dvojnih zvijezda zapravo dvije zvijezde kruže oko njihova zajedničkog središta mase. Ako su im brzine gibanja dovoljno velike, one se mogu proučavati spektrometrijom. Promotrite najjednostavniji slučaj spektroskopske dvojne zvijezde koja se sastoji od dvije jednake zvijezde mase m kojima je polumjer kruženja R , a promatrač se nalazi u istoj ravnini u kojoj one kruže.

Zagrijani vodik u laboratoriju na Zemlji emitira svjetlost frekvencije $4,568110 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Svjetlost koja s dvojne zvijezde stiže na Zemlju između ostalih sadrži i komponentu čija se frekvencija mijenja između $4,567710 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ i $4,568910 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Odredite da li se ta dvojna zvijezda približava ili udaljava od Zemlje, kolikom brzinom, te kolike su brzine kruženja dviju zvijezda! Kolike su mase zvijezda i polumjer njihova kruženja ako se navedene granične frekvencije pojavljuju svakih 11 dana?

Brzina svjetlosti je $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, a gravitacijska konstanta $G=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Zadatak 2 (20 bodova)

Mnogi kukci imaju oko složeno od uskih dugih stožastih stanica *ommatidia*. Pogled na složeno oko pčele s prednje strane i shematski presjek složenog oka prikazani su na slikama. Svjetlost ulazi kroz prozirni djelić svake *ommatidie* na površini oka, a nastali podražaji vode se u središte oka. Pretpostavite da su *ommatidie* međusobno jednake. Polumjer oka (kugle) je $r=3 \text{ mm}$, širina *ommatidie* pri površini oka je d , a za valnu duljinu svjetlosti uzmite $\lambda=400 \text{ nm}$.



a) Svaka *ommatidia* prima svjetlost iz određenog smjera. Na temelju geometrijskih razmatranja napišite izraz za kutnu udaljenost (s obzirom na središte oka) dvaju vrlo sitnih predmeta koje će složeno oko vidjeti kao razdvojene, to jest svjetlost od njih će ulaziti u različite *ommatidie*! Komentirajte kako dakle vidna oština složenog oka ovisi o širini *ommatidie* d !

b) Promotrite zatim utjecaj difrakcije na širenje snopa svjetlosti. Koliki je kut pod kojim će se širiti snop svjetlosti valne duljine λ emitiran s kružne pločice promjera d ? Koliki je stoga kut unutar kojeg će jedna *ommatidia* primati svjetlost zbog pojave difrakcije? Komentirajte kako taj kut ovisi o širini *ommatidie* d !

c) Izračunajte širinu *ommatidie* d za koju zbroj dvaju prethodnih efekata daje najbolju moguću kutnu razlučivost složenog oka! (Dobit ćete širinu *ommatidie* približno jednaku onoj izmjerenoj kod pčele.)

d) Na temelju dobivenih rezultata odredite na kojoj udaljenosti jedno od drugoga smiju biti zrnca maka koja su od pčele udaljena 1m da bi ih ona razlikovala?

Napomena: za malene kuteve koristite se izrazom $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$.

Zadatak 3 (14 bodova)

U medicini često koriste radioaktivni kobalt $^{60}\text{Co}_{27}$ čije je vrijeme poluraspada 5,27 godina, dok se u nuklearnoj bombi obično koristi uran $^{235}\text{U}_{92}$ s vremenom poluraspada $7,13 \cdot 10^8$ godina. Izračunajte omjer mase urana i mase kobaleta koji u početnom trenutku imaju međusobno jednaku aktivnost! Nakon koliko vremena će omjer aktivnosti tih uzoraka biti jednak 100?

Zadatak 4 (16 bodova)

Mirujući mion raspada se na pozitron i dva neutrina (elektronski neutrino i mionski antineutrino):

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu.$$

Masa mirovanja miona je $106\text{MeV}/c^2$, a pozitrona (kao i elektrona) $0,511\text{MeV}/c^2$. Standardni model elementarnih čestica uzima da je masa elektronskog neutrina manja od $7 \cdot 10^{-6}\text{MeV}/c^2$, a masa mionskog neutrina manja od $0,3\text{MeV}/c^2$, pa se u praktičnim računima mase neutrina gotovo uvijek zanemaruju u usporedbi s masama miona i elektrona. Stoga i vi pretpostavite da su mase neutrina jednake nuli!

Kolika je najveća moguća kinetička energija nastalog pozitrona? Argumentirano skicirajte za taj slučaj smjerove u kojima će odletjeti neutrini i pozitron!

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2003
Eksperimentalni zadatak – 4 razred

Određivanje valne duljine svjetlosti pomoću optičke rešetke

Pribor:

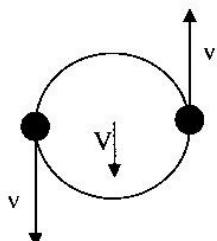
- Optička rešetka
- Laser ($\lambda = 630 \text{ nm}-680 \text{ nm}$)
- Filter (zeleni i crveni)
- Izvor bijele svjetlosti
- Ravnalo (do 40 cm)
- Mjerka s pukotinom
- Plastelin za učvrstiti mjerku

Zadatak

- | | |
|---|----------|
| a) opisati postupak određivanja traženih veličina | 9 bodova |
| b) odrediti valne duljine svjetlosti koju propušta zeleni i crveni filter | 9 bodova |
| c) odrediti konstantu optičke rešetke i broj zareza po 1 cm | 8 bodova |
| d) provesti račun pogreške | 4 boda |

Rješenja zadatka - 4. grupa

Zadatak 1 (20 bodova)



promatrač

Kad se izvor svjetlosti približava promatraču brzinom v_1 , frekvencija dolazne svjetlosti je: $f_1 = f \sqrt{\frac{c + v_1}{c - v_1}}$, a kad se izvor udaljava od promatrača brzinom v_2 , frekvencija je $f_2 = f \sqrt{\frac{c - v_2}{c + v_2}}$, gdje je $f = 4,568110 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. **2 boda**

Najveći Dopplerov pomak javlja se u trenutku kad se zvijezde gibaju baš direktno prema opažaču ili od njega, **1 bod** kao što je prikazano na slici, **1 bod** a frekvencije dolazne svjetlosti sa dviju zvijezda odgovaraju tada zadanim rubnim frekvencijama $f_1 = 4,568910 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ i $f_2 = 4,567710 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. **1 bod**

V je brzina gibanja središta mase dvojne zvijezde, a v su brzine kruženja svake zvijezde oko središta mase. U slučaju da je $V > v$, obje bi se zvijezde približavale promatraču (ako je V prema promatraču) ili bi se obje od njega udaljavale (ako je V od promatrača). **1 bod**

Tada bi Dopplerovi pomaci za obje zvijezde bili prema višoj frekvenciji ili za obje prema nižoj. To bi bilo u suprotnosti sa zadanim $f_1 > f > f_2$. **1 bod**

Stoga mora biti $V < v$, to jest jedna se približava a druga udaljava od promatrača. **1 bod** Uzmimo da je V prema promatraču. Brzina približavanja lijeve zvijezde je $v_1 = v + V$, a brzina udaljavanja desne $v_2 = v - V$. **1 bod**

Rješavanjem sustava jednadžbi $f_1 = f \sqrt{\frac{c + v + V}{c - v - V}}$ i $f_2 = f \sqrt{\frac{c - v + V}{c + v - V}}$ dobiju se $V = c \frac{f^2(f_1^2 - f_2^2)}{(f^2 + f_1^2)(f^2 + f_2^2)}$ i $v = c \frac{f_1^2 f_2^2 - f^4}{(f^2 + f_1^2)(f^2 + f_2^2)}$. **4 boda**

Dvojna zvijezda se približava Zemljini brzinom $V = 13,13 \text{ km/s}$, a brzina kruženja zvijezda je $v = 39,4 \text{ km/s}$. **1 bod**

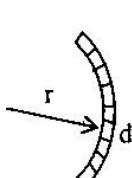
Ako se prepostavi da je V u suprotnom smjeru, dobije se $V = -13,13 \text{ km/s}$. **1 bod**

Rubne frekvencije se ponovno opaze kada zvijezde obidu pola kružnice, pa je

$$T = \frac{R\pi}{v}, \text{ tj. } R = \frac{vT}{\pi} = 1,192 \cdot 10^{10} \text{ m.} \quad \text{2 boda}$$

$$\text{Iz } \frac{mv^2}{R} = G \frac{m^2}{(2R)^2} \text{ slijedi } m = \frac{4v^3 T}{\pi G} = 1,108 \cdot 10^{30} \text{ kg.} \quad \text{2 boda}$$

Zadatak 2 (20 bodova)



a) Svjetlost u jednu *ommatidium* stiže iz kuta širine $\theta_e = \frac{d}{r}$

(budući da je $d \ll r$). **2 boda**

Ako su dva predmeta unutar tog kuta, oko ih neće moći

razlikovati jer signal tada nastaje samo unutar jedne *ommatidie*. Što je d manji, bolja je oštrina vida složenog oka.

2 boda

b) Zbog difrakcije snop svjetlosti će se širiti unutar kuta određenog uvjetom za minimum $d \sin \theta_d = \lambda$.



$$\text{Zbog } d \gg \lambda, \theta_d = \frac{\lambda}{d}.$$

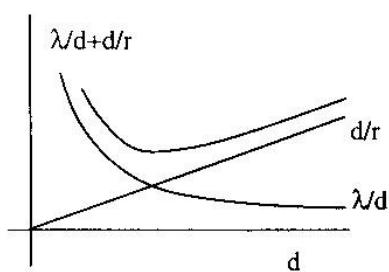
2 boda

Dakle, *ommatidia* će primati svjetlost iz kuta širine $\theta_d = \frac{\lambda}{d}$.

1 bod

Što je d manji, taj kut je veći, i slika koju stvara složeno oko zbog difrakcije je razmazanija.

2 boda



c) Za zbroj tih dvaju efekata očito postoji optimalni d za koji je oštrina slike najbolja. Stoga tražimo minimum funkcije

$$\theta_s + \theta_d = \frac{d}{r} + \frac{\lambda}{d}, \text{ gdje je polumjer oka } r=3\text{mm,}$$

a valna duljina $\lambda=400\text{nm}$.

1 bod

On se može naći isprobavanjem, grafički, ili izjednačavanjem derivacije s nulom. Minimum se dobije za $d = \sqrt{r\lambda} \approx 35\mu\text{m}$.

4 boda

Za manji d prevladat će difrakcijsko

razmazivanje, a za veći d smanjit će se geometrijska rezolucija.

2 boda

$$\text{d) Za } d=35\mu\text{m dobije se kutna razlučivost } \frac{\lambda}{d} = \frac{d}{r} = 0,011.$$

2 boda

Dakle, zrna maka moraju biti udaljena barem $1\text{m} \cdot 0,011 = 1,1\text{cm}$ da bi ih pčelinje oko razlikovalo.

2 boda

Zadatak 3 (14 bodova)

Iz zakona radioaktivnog raspada $N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$

1 bod

dobije se aktivnost $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$,

1 bod

a lako se pokaže $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$, gdje je $T_{1/2}$ vrijeme poluraspada, N_0 početni broj jezgara, N broj neraspadnutih jezgara u trenutku t .

2 boda

Iz uvjeta da je u početnom trenutku aktivnost urana i kobalta jednaka $A_{Co}(0)=A_U(0)$

$$\text{slijedi } \frac{N_{Co}}{T_{1/2}^{Co}} = \frac{N_U}{T_{1/2}^U}.$$

1 bod

Broj jezgara jednak je omjeru mase uzorka m i mase jedne jezgre M , pa je

$$\frac{m_{Co}}{M_{Co} T_{1/2}^{Co}} = \frac{m_U}{M_U T_{1/2}^U}.$$

1 bod

$$\text{Odatle je } \frac{m_U}{m_{Co}} = \frac{M_U T_{1/2}^U}{M_{Co} T_{1/2}^{Co}} = 5,3 \cdot 10^8, \text{ gdje se uzima } M_U=235, \text{ a } M_{Co}=60.$$

2 boda

Omjer aktivnosti u ovisnosti o vremenu je

$$\frac{A_U}{A_{Co}} = \frac{A_U(0) 2^{\frac{t}{T_{1/2}^U}}}{A_{Co}(0) 2^{\frac{t}{T_{1/2}^{Co}}}} = 2^{\frac{t(\frac{1}{T_{1/2}^{Co}} - \frac{1}{T_{1/2}^U})}{T_{1/2}^{Co}}}.$$

3 boda

Tražimo trenutak u kojem je taj omjer 100. Dobije se $t=6,64 T_{1/2}^{Co}=35$ godina. **3 boda**

Zadatak 4 (16 bodova)

Zakon očuvanja energije: $m_\mu c^2 = m_e c^2 + T_e + T_\nu + T_{\bar{\nu}_\mu}$, gdje su $m_{\mu,e}$ mase mirovanja miona i pozitrona, a T kinetičke energije pozitrona i dvaju neutrina. **2 boda**

Zakon očuvanja količine gibanja: $0 = \vec{p}_e + \vec{p}_\nu + \vec{p}_{\bar{\nu}_\mu}$. **1 bod**

Najvećoj kinetičkoj energiji T_e odgovara i najveća količina gibanja p_e . **1 bod**
Da bi dva neutrina imala što veću ukupnu količinu gibanja u suprotnom smjeru od količine gibanja pozitrona, a da bi pritom na njih potrošena energija bila najmanja, oni moraju oba odletjeti u smjeru suprotnom od pozitrona. **4 boda**

Stoga je $p_e = p_\nu + p_{\bar{\nu}_\mu}$. **1 bod**

Za neutrine kao čestice bez mase vrijedi: $T_{\nu e} = c p_{\nu e}$ i $T_{\bar{\nu}_\mu} = c p_{\bar{\nu}_\mu}$. **1 bod**

Slijedi $m_\mu c^2 = E_e + (p_\nu + p_{\bar{\nu}_\mu})c$, to jest $m_\mu c^2 - E_e = p_e c$. **1 bod**

Korištenjem invarijantnosti $E_e^2 - p_e^2 c^2 = m_e^2 c^4$, **1 bod**
nakon uvrštavanja u kvadrirani prethodni izraz dobije se

$m_\mu^2 c^4 + m_e^2 c^4 = 2m_\mu c^2 E_e = 2m_\mu c^2 (T_e + m_e c^2)$. **1 bod**

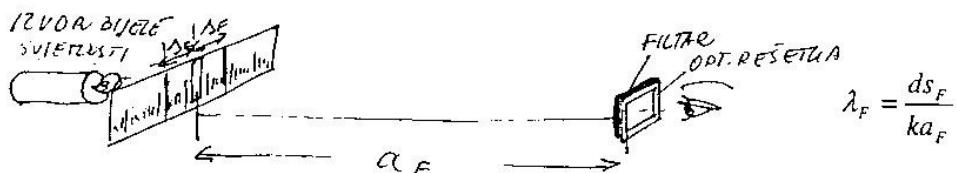
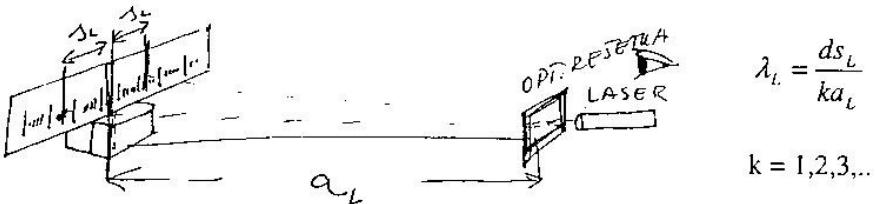
Sređivanjem se dobije $T_e = \frac{(m_\mu - m_e)^2 c^2}{2m_\mu}$. **2 boda**

Uvrštavanjem zadanih masa mirovanja $m_\mu = 106 \text{ MeV}/c^2$ i $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$ dobije se najveća moguća kinetička energija $T_e = 52,5 \text{ MeV}/c^2$. **1 bod**

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2003
Eksperimentalni zadatak – 4 razred

Rješenje

- a) Valnu duljinu svjetlosti koju propušta zeleni i crveni filter optičkom rešetkom moguće je odrediti zadanim priborom tako da se mijere udaljenosti a od optičke rešetke do mjerke s pukotinom i udaljenosti s spektra ($k=1,2,\dots$)



$$\lambda_L : \lambda_F = \frac{d \cdot s}{k \cdot a_L} : \frac{d \cdot s_F}{k \cdot a_F} \Rightarrow \lambda_F = \frac{s_F \cdot a_L}{a_F \cdot s_L} \lambda_L \quad \lambda_L = 630 \text{ nm} - 680 \text{ nm}$$

Konstantu optičke rešetke d odredi se iz postupka s laserskim snopom. Kako je poznata valna duljina λ_L lasera, mjeranjem s_L , a_L uz $k=1$ (najintenzivniji red spektra) iz izraza

$$\lambda_L = \frac{ds_L}{ka_L} \Rightarrow d = \frac{\lambda_L \cdot k \cdot a_L}{s_L}$$

$$n(\text{broj zareza}) = (\text{jedinična duljina})/d$$

b) zeleni filter

a _L /m	s _L /m	a _z /m	s _z /m	λ _z /m

b) crveni filter

a _L /m	s _L /m	a _c /m	s _c /m	λ _c /m

$$r_z = \frac{|\Delta\lambda|}{\bar{\lambda}_z} \cdot 100\% \quad \bar{\lambda}_z = (\bar{\lambda}_z \pm \Delta\lambda)$$

$$r_c = \frac{|\Delta\lambda|}{\bar{\lambda}_c} \cdot 100\% \quad \bar{\lambda}_c = (\bar{\lambda}_c \pm \Delta\lambda)$$

c)

λ _L /m	k	a _L /m	s _L /m	d/m

$$\bar{d} = \dots$$

$$r = \frac{|\Delta d|}{\bar{d}} \cdot 100\% \quad d = (\bar{d} \pm \Delta d)$$

d) račun pogreške naznačen je kod tabličnog prikaza