

Zadatak 1. (10 bodova)

Frekvencije dva susjedna harmonika jedne svirale orgulja su 1372 Hz i 1764 Hz. Je li ta svirala otvorena ili zatvorena i kako znate? Kolika je duljina svirale? Brzina zvuka u zraku je 344 m/s.

Zadatak 2. (10 bodova)

Na slici je prikazana ljudska ruka koja podiže uteg. Ruka se nalazi u ravnoteži pod djelovanjem težine utega, napetosti T koja djeluje na tetivu koja je povezana s bicepsom i silom F kojom nadlaktica djeluje na podlakticu u laktu (E). Masa utega je 20 kg, duljina podlaktice je 30 cm, udaljenost između lakta i točke A je 5 cm a kut koji napetost T zatvara s horizontalom je 80° . Odredi napetost T , te smjer i iznos sile F (smjer i iznos njenih komponenta F_x i F_y , iznos od F , te kut koji zatvara s horizontalom). Težinu ruke zanemarujemo.

(Napomena: na slici su točke A i E zbog preglednosti nacrtane mnogo udaljenije nego su to u stvarnosti.)



Zadatak 3. (10 bodova)

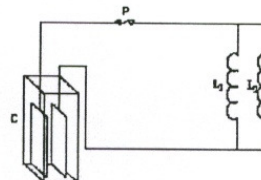
Ako željeznički vagon mase 15000 kg opteretimo dodatnom masom od 1000 kg, on se spušta na amortizerima za 0.49 cm. Izračunajte minimalnu brzinu kretanja vagona pri kojoj bi nastala rezonancija zbog udara kotača o spojeve tračnica čija je duljina 16 m. Udaljenost među kotačima vagona je također 16 m.

Zadatak 4. (10 bodova)

Titrajni krug sastoji se od oscilatora i dvije zavojnice kao na slici. Pločasti kondenzator nalazi se u staklenoj posudi čije su ploče postavljene vertikalno tako da se svojim donjim rubovima oslanjaju na dno posude. Širina svake ploče je 10 cm, visina 20 cm a međusobni razmak je 2 mm. Među pločama, do polovice njihove visine nalazi se petrolej, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 2.1$ ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m). Induktivitet zavojnica je $L_1 = 500$ mH i $L_2 = 600$ mH.

Pronađi:

- rezonantnu frekvenciju ovog kruga,
- pri otvorenom prekidaču, kondenzator se nabije spajanjem na električni izvor napona 100 V. Zatim se prekidač uključi. Izvor je odvojen pri uključivanju prekidača. Kolike su najveće jakosti struja koje prolaze kroz zavojnice?



Zadatak 5. (10 bodova)

Prijemnik i izvor zvučnih oscilacija frekvencije 2000 Hz nalaze se smješteni na x -osi. Izvor titra duž te osi, s amplitudom 50 cm. Prijemnik se udaljava od izvora brzinom 10 m/s, i registrira zvuk u rasponu frekvencija od 200 Hz. Koja je frekvencija titranja izvora? Brzina zvuka je 340 m/s.

Zadatak 1. (10 bodova)

Za zatvorenu sviralu vrijedi sljedeća relacija: $f_n = \frac{nv}{4L}$ ($n = 1, 3, 5, \dots, 2k+1, \dots$), gdje f označava n -ti harmonik (pažnja: n mora biti prirodan broj), v je brzina zvuka, a L je duljina svirale.

Za otvorenu sviralu pak vrijedi relacija: $f_n = \frac{nv}{2L}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). [3]

Pretpostavimo da je svirala zatvorena. Tada mora vrijediti sljedeće:

$$1372 = \frac{n \cdot 344}{4L},$$

$$1764 = \frac{(n+2) \cdot 344}{4L}. \quad [1]$$

Rješavanjem ovog sustava jednačbi dobivaju se sljedeća rješenja: $n = 7, L = 43.9 \text{ cm}$. [2]

Pretpostavimo li da je svirala otvorena, jednačbe su sljedeće:

$$1372 = \frac{n \cdot 344}{2L},$$

$$1764 = \frac{(n+1) \cdot 344}{2L}. \quad [1]$$

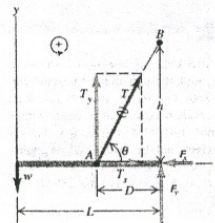
Rješavanjem ovog sustava za rješenje se dobiva $n = 3.5$. To očito nije rješenje problem budući da n mora biti cijeli broj. [2]

Dakle, svirala je zatvorena, duljine 43.9 cm a navedene frekvencije odgovaraju 7. i 9. harmoniku. [1]

(Napomena: kod zatvorene svirale ne postoje parni harmonici pa stoga 7. i 9. harmonik jes susjedni.)

Zadatak 2. (10 bodova)

Silu T rastavimo na komponente T_x i T_y , $T_x = T \cos \Theta$, $T_y = T \sin \Theta$. Silu koja djeluje na lak također rastavimo na komponente F_x i F_y . Pretpostavimo da djeluju u smjerovima kao na slici no to je nebitno jer ćemo smjerove odrediti iz dobivenih rezultata.



[1]

Zatim uočimo da ako uzmemo momente sile s obzirom na lakat, rezultantna jednačba neće sadržavati F_x , F_y ili F_z : $\sum M_e = Lw - DT_y = 0$. [2]

Također vrijedi i sljedeće: $\sum F_{ak,x} = T_x + (-F_x) = 0$, $\sum F_{ak,y} = T_y + F_y + (-w) = 0$. [2]

Nakon sređivanja dobivamo:

$$T = \frac{Lw}{D \sin \Theta}.$$

$$F_x = \frac{Lw}{h}, \quad [2]$$

$$F_y = w - \frac{Lw}{D} = -\frac{(L-D)w}{D} \quad \left(\begin{array}{l} \text{negativni znak nam ukazuje na to da smo pretpostavili} \\ \text{krivi smjer za } F_y, \text{ ona u biti djeluje prema dolje} \end{array} \right).$$

Rezultati su: $T = 1195 \text{ N}$, $F_x = 208 \text{ N}$, $F_y = -981 \text{ N}$, $F = 1003 \text{ N}$, a kut koji F zatvara s horizontalom iznosi 78.03° . [2]

(U računu se uzimalo da je $g = 9.81 \text{ m/s}^2$)

Napomena. Alternativni način za određivanje F_x i F_y je upotreba dvije dodatne jednačbe za momente sile (s obzirom na točke A i B):

$$\sum M_A = (L-Dw) + DF_y = 0 \text{ i } \sum M_B = Lw - hF_x = 0.$$

Zadatak 3. (10 bodova)

Na amortizere vagona djeluje periodična sila u trenucima kada kotač vagona prijeđe preko spoja tračnica. Zbog toga će amortizeri prisilno oscilirati i u trenutku kada se frekvencija f izjednači s vlastitom frekvencijom f_0 oscilatora (u ovom slučaju amortizera) doći će do rezonancije.

Pretpostavimo da amortizeri osciliraju jednostavnim harmoničnim oscilacijama. Tada je

$$\text{period oscilacija } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad [2]$$

Budući da je u slučaju rezonancije vlastita frekvencija oscilatora $f_0 = \frac{1}{T_0}$ jednaka frekvenciji

$f = \frac{1}{T}$ periodične sile, vremena T i T_0 moraju biti ista. T_0 odgovara vremenskom intervalu koji protekne od trenutka kada kotač vagona prijeđe od jednog spoja tračnice do sljedećeg. Ako se vagon kreće jednolikom brzinom v biti će $l = vT_0 = vT$, tj.:

$$v = \frac{l}{T} = \frac{l}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}}. \quad [3]$$

Opterećenje vagona masom od 1000 kg , tj. težinom od 9810 N dovodi do spuštanja vagona za 0.49 cm , a poznato je da je kod jednostavnih harmoničnih oscilacija povratna sila proporcionalna elongaciji, tj. $F = kx$. Iz toga slijedi $k = 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}$. [3]

Uvrštavanjem te vrijednosti u gornju jednačbu za brzinu dobivamo da će rezonancija nastupiti tek pri brzini $v = 29.5 \text{ m/s} = 106.2 \text{ km/h}$. [2]

Zadatak 4. (10 bodova)

a) Kondenzator se ponaša kao dva paralelno spojena kondenzatora, od kojih jedan između ploča ima petrolej a drugi zrak.

$$C_{uk} = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} + \frac{\epsilon_0 S}{d} = 1.37 \times 10^{-10} \text{ F} \quad [2]$$

Zavojnice su spojene u paralelu.

$$L_{uk} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} = 0.27 \text{ mH} \quad [2]$$

$$\text{Rezonantna frekvencija iznosi } \nu = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_{uk} \cdot C_{uk}}} = 827.519 \text{ kHz} . \quad [1]$$

b) Nakon što se prekidač uključi, naponi na krajevima zavojnica su jednaki, pa je $U_{L_1} = U_{L_2}$,

$$\text{tj. } L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t}, \text{ odakle slijedi } L_1 I_1 = L_2 I_2 \text{ (jer su u početnim trenucima } I_{01} = I_{02}). \quad [2]$$

Jakosti struja su najveće kada je kondenzator ispražnjen. Tada je, prema zakonu održanja energije $\frac{CU^2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}$, iz čega jednostavno slijedi:

$$I_1 = U \sqrt{\frac{L_2 C_{uk}}{L_1 (L_1 + L_2)}} = 1.223 \text{ mA} \quad [2]$$

$$I_2 = U \sqrt{\frac{L_1 C_{uk}}{L_2 (L_1 + L_2)}} = 1.018 \text{ mA} . \quad [1]$$

Zadatak 5. (10 bodova)

Budući da izvor titra harmonijski, on se giba brzinama u intervalu od $-v_{\max}$ do $+v_{\max}$, u odnosu na prijemnik.

Maksimalna brzina harmoničnog oscilatora je $v_{\max} = A \cdot \omega$, gdje je A amplituda titranja, a ω njegova kružna frekvencija.

Zbog toga će prijemnik registrirati frekvencije u intervalu od $f = f_0 \frac{v_{\text{zvuk}} - v_{\text{prijem}}}{v_{\text{zvuk}} + v_{\max}}$ do

$$f' = f_0 \frac{v_{\text{zvuk}} + v_{\text{prijem}}}{v_{\text{zvuk}} - v_{\max}} . \text{ Razlika tih frekvencija mora biti jednaka } 200 \text{ Hz}. \quad [3]$$

Uvrštavanjem gornjih relacija dobiva se $v_{\max} = 17.5 \text{ m/s}$,

tj. $\omega = 35 \text{ s}^{-1}$.

[2]
[1]