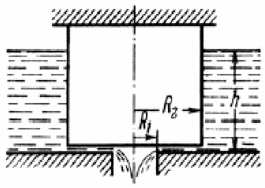
7. travnja 2005.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE
Srednje škole – 2. grupa

1. zadatak (10 bodova)
Horizontalno dno široke posude u kojoj se nalazi idealna tekućina ima okrugli izlazni otvor polumjera R_1 iznad kojeg je stavljen zatvoreni valjak čiji je polumjer $R_2 > R_1$ (slika). Razmak između valjka i dna posude je vrlo malen. Gustoća tekućine je ρ. Izračunaj statički tlak tekućine u području razmaka kao funkciju udaljenosti r od osi otvora (ova os je ujedno i os valjka), ako je visina tekućine h.



2. zadatak (10 bodova)
Dvije posude jednakih volumena V spojene su uskom cijevi na kojoj se nalazi ventil. U početnom trenutku ventil je zatvoren i obje posude sadrže monoatomni plin na tlakovima p_1 i p_2 i temperaturama T_1 i T_2. Koliki će biti konačan tlak i konačna temperatura nakon što se ventil otvori? Mijenja li se išta ako se razmatra dvoatomni plin? (Zanemari gubitke topline iz sustava).

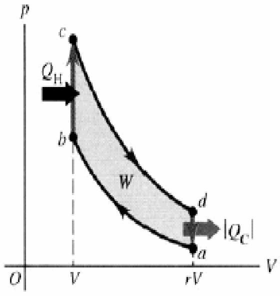
3. zadatak (10 bodova)
U vrhovima jednakokračnog trokuta se nalaze redom: na bazi dvije nenabijene kugle polumjera r, a u vrhu trokuta kugla K polumjera R nabijena nabojem Q. Kugla K se spoji pomoću vodiča prvo s jednom kuglom na bazi, zatim se odspoji i spoji s drugom. Pretpostavite da su r i R puno manji od stranica trokuta i da je raspodjela naboja na kuglama sfernosimetrična.
a) Koliki je naboj na drugoj kugli nakon spajanja ako je $r/R=0.8$?
b) Za koji omjer r/R je naboj na drugoj kugli jednak $Q/10$?

4. zadatak (10 bodova)
Izotropna kugla polumjera R_0 i mase m_A načinjena je od materijala A i zagrijana na temperaturu $t_2=165°C$. Zatim je postavljena na prsten (žica) polumjera r_0 (prije postavljanja kugle) načinjen od materijala B. Početna temperatura prstena je $t_1=100°C$. Ako u procesu postizanja termičke ravnoteže 70% topline ode u atmosferu, hoće li kugla proći kroz prsten? Koja je ravnotežna temperatura sustava t_R? Masa prstena je $m_B=0.05m_A$, dok su linearni koeficijenti rastezanja materijala B i A vezani relacijom $\alpha_B=2\alpha_A$, gdje je $\alpha_A=0.001°C^{-1}$, a specifični toplinski kapaciteti materijala s $c_B=3c_A$. Također, vrijedi $R_0/r_0=1.1$

5. zadatak (10 bodova)
Benzinski motor je tipičan primjer toplinskog stroja. Na slici je prikazan idealizirani model termodinamičkog procesa plina u njemu (tzv. *Ottov* ciklus). U točki a mješavina zraka i benzina ulazi u cilindar i adijabatski se komprimira do točke b gdje se smjesa upali (svjećicom) pri čemu joj se preda količina topline Q_H. Zbog toga se plin (zajedno s klipom) adijabatski proširi (od c do d) i na kraju ohladi (d do a). Termička iskoristivost motora definira se kao $e=W/Q_H$ (udio topline pretvoren u rad).

a) Izračunajte e i izrazite ga preko $\gamma = c_P/c_V$ i r=kompresijski omjer (vidi sliku!)
b) Ako je r=8, koliko iznosi e?

Mješavinu zraka i benzina smatrati idealnim plinom.



ŽUANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE
Srednje škole – 2. grupa – rješenja i bodovanje

Zadatak 1.
Potrebno je primijeniti Bernoullijevu jednadžbu i to u točki na površini i negdje u području razmaka (na udaljenosti r od osi, gdje je $R_1<r<R_2$) tj.

$$p_A+\rho gh+\frac{\rho v^2}{2}=p_2(r)+\frac{\rho v^2(r)}{2}\ \textbf{[1 bod]} \tag{0.1}$$

p_A označava atmosferski tlak. Također, kako je posuda široka, to je $v<<v(r)$ pa se 3. član s lijeve strane jednadžbe može zanemariti čime se jednadžba pojednostavnjuje na

$$p_A+\rho gh\approx p_2(r)+\frac{\rho v^2(r)}{2}\ \textbf{[1 bod]} \tag{0.2}$$

Ako se pogleda površina poprečnog presjeka kroz koji mora proći voda, vidi se da je (u području razmaka tj. za $R_1<r<R_2$) to plašt valjka visine h' (ovo je, u biti, visina razmaka) i širine $2\pi r$ tako da je

$$S(r)=2\pi rh'\ \textbf{[1 bod]} \tag{0.3}$$

odn. $S_1(r=R_1)=2\pi R_1h'$ pa nakon što se iskoristi i relacija

$$S(r)v(r)=S_1v_1 \tag{0.4}$$

dobije se

$$v(r)=\frac{R_1}{r}v_1\ \textbf{[2 boda]} \tag{0.5}$$

Sad preostaje naći v_1, a to se može ponovno pomoću Bernoullijeve jednadžbe (0.2) u koju se sad uvrsti za statički tlak $p_2(r=R_1)=p_A$ pa se dobije

$$v_1=\sqrt{2gh}\ \textbf{[2 boda]} \tag{0.6}$$

Tako jednadžba (0.5) postaje

$$v(r)=\frac{R_1}{r}\sqrt{2gh} \tag{0.7}$$

odn. iz (0.2) se dobije

$$p_2(r)=p_A+\rho gh\left(1-\frac{R_1^2}{r^2}\right)\ \text{za } R_1<r<R_2\ \textbf{[3 boda]} \tag{0.8}$$

Zadatak 2.
Ukupna količina plina u obje posude je

$$n=n_1+n_2 \tag{0.9}$$

pa ako se iskoristi jednadžba stanja idealnog plina $pV=nRT$ za 1 i 2 dobije se

$$n=\frac{p_1V_1}{RT_1}+\frac{p_2V_2}{RT_2}\ \textbf{[1 bod]} \tag{0.10}$$

Općenito za jedno- i dvoatomne plinove vrijedi

$$pV=(\gamma-1)U\ \textbf{[1 bod]} \tag{0.11}$$

gdje je $\gamma=c_P/c_V$. NAPOMENA: Za jednoatomne plinove $\gamma=5/3$ pa se (0.11) svodi na $pV=2/3\ U$. Može se i otuda krenuti.
Unutarnja energija je očuvana tj.

$$U_1 + U_2 = U = \frac{1}{\gamma - 1}\left(p_1V_1 + p_2V_2\right) = \frac{1}{\gamma - 1} p_f V_f \ \textbf{[2 boda]} \tag{0.12}$$

a za konačni volumen vrijedi $V_f = V_1 + V_2 = 2V$ pa je

$$p_f = \frac{p_1 + p_2}{2} \ \textbf{[2 boda]} \tag{0.13}$$

Ako se u jednadžbu stanja $pV_f = nRT_f$ uvrste (0.10) i (0.13) dobije se za konačnu temperaturu

$$T_f = \frac{p_1 + p_2}{\dfrac{p_1}{T_1} + \dfrac{p_2}{T_2}} = T_1T_2 \frac{p_1 + p_2}{p_1T_2 + p_2T_1} \ \textbf{[3 boda]} \tag{0.14}$$

Kako rješenje (0.14) ne ovisi o γ, zaključak je da se ništa ne mijenja gleda li se dvoatomni plin [**1 bod**].

Zadatak 3.

Neka je s a označena duljina baze trokuta, a s b duljina krakova.

a) Nakon što se K spoji s prvom kuglom ove kugle postaju ekvipotencijalne plohe tj. vrijedi

$$k\frac{q_1}{r} + k\frac{Q'}{b} = k\frac{Q'}{R} + k\frac{q_1}{b} \ \textbf{[1 bod]} \tag{0.15}$$

gdje je q_1 naboj na prvoj kugli, a Q' naboj na kugli K nakon spajanja. U relaciji (0.15) se, zbog r, $R \ll b$ mogu zanemariti 2. članovi s lijeve i desne strane tj. jednadžba (0.15) postaje

$$k\frac{q_1}{r} \approx k\frac{Q'}{R} \ \textbf{[1 bod]} \tag{0.16}$$

pa kad se uzme u obzir još i zakon o očuvanju naboja $q_1 = Q - Q'$ [**1 bod**] može se izačunati za naboje na kugli K i prvoj kugli

$$\begin{aligned} Q' &= \frac{R}{r+R}Q \\ q_1 &= \frac{r}{r+R}Q \end{aligned} \ \textbf{[2 boda]} \tag{0.17}$$

Zatim se spoji kugla K s drugom kuglom pa se potencijali izjednače odn.

$$k\frac{q_2}{r} + k\frac{q_1}{a} + k\frac{Q''}{b} = k\frac{Q''}{R} + k\frac{q_1}{b} + k\frac{q_2}{b} \tag{0.18}$$

pa se, uz $Q'' = Q' - q_2$ i zanemarenje 2. i 3. člana s lijeve i desne strane, dobije

$$q_2 = \frac{r}{r+R}Q' = \frac{rR}{(r+R)^2}Q = \frac{\dfrac{r}{R}}{\left(1 + \dfrac{r}{R}\right)^2}Q \approx 0.247Q \ \textbf{[3 boda]} \tag{0.19}$$

b) Dakle, prema relaciji (0.19) uz uvrštavanje $q_2 = Q/10$ i uz $x = r/R$ dobije se kvadratna jednadžba

$$x^2 - 8x + 1 = 0 \tag{0.20}$$

čija su rješenja

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{r}{R}\right)_1 \approx 0.13 \\ x_2 &= \left(\frac{r}{R}\right)_2 \approx 7.87 \end{aligned} \ \textbf{[2 boda]} \tag{0.21}$$

Zadatak 4.

Neka η označava onaj dio toplinske energije koji se prenese s kugle na prsten (ostatak ode u atmosferu). Tako je

$$\eta c_A m_A \left(t_2 - t_R\right) = c_B m_B \left(t_R - t_1\right) \text{ [1 bod]} \tag{0.22}$$

pa je

$$t_R = \frac{\eta c_A m_A t_2 + c_B m_B t_1}{\eta c_A m_A + c_B m_B} \tag{0.23}$$

odnosno kad se uvrsti η=0.3, m_B=0.05m_A, c_B=3c_A, t_1=100°C i t_2=165°C dobije se za ravnotežnu temperaturu

$$t_R \approx 143.3°\text{C [3 boda]} \tag{0.24}$$

Polumjer prstena poveća se i to prema

$$r = r_0\left[1 + \alpha_B\left(t_R - t_1\right)\right] \text{ [1 bod]} \tag{0.25}$$

dok se polumjer kugle smanji prema

$$R = R_0\left[1 - \alpha_A\left(t_2 - t_R\right)\right] \text{ [2 boda]} \tag{0.26}$$

Da bi kugla prošla kroz prsten mora biti r/R>1 pa ako se podijeli (0.26) s (0.25) i uvrste brojke dobije se r/R≈1.01>1 **[3 boda]** dakle kugla će proći kroz prsten.

NAPOMENA: Moguće je računati R preko $R = R_0\sqrt[3]{1 - 3\alpha_A\left(t_2 - t_R\right)}$ čime se dobije približno isti rezultat kao i u (0.26). Naime, vrijedi $\sqrt[3]{1-3x} \approx 1 - x$.

Zadatak 5.

a) Kad plin prođe kroz kružni proces (od a preko b, c, d do povratka natrag u a) unutarnja energija U_2 plina jednaka je unutarnjoj energiji U_1 na početku ciklusa (radi se o funkciji stanja) tj.

$$U_2 - U_1 = 0 = Q - W \Rightarrow Q = W \tag{0.27}$$

gdje je Q razlika topline predane sustavu i topline koju je sustav predao okolini, a W razlika rada koji sustav obavlja nad okolinom i rada koji okolina obavlja nad sustavom.

Tako se efikasnost e može računati prema

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{|Q_H| - |Q_C|}{|Q_H|} = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_H|} \text{ [1 bod]} \tag{0.28}$$

kako su procesi b-c i d-a izohorni slijedi da je

$$\left.\begin{aligned} Q_H &= nc_V\left(T_c - T_b\right) > 0 \\ Q_C &= nc_V\left(T_a - T_d\right) < 0 \end{aligned}\right. \text{ [2 boda]} \tag{0.29}$$

pa se za e dobije

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = \frac{nc_V\left(T_c - T_b\right) + nc_V\left(T_a - T_d\right)}{T_c - T_b} = \frac{T_c - T_b + T_a - T_d}{T_c - T_b} \text{ [2 boda]} \tag{0.30}$$

dakle treba naći T_a, T_b, T_c i T_d, a to se nađe iz relacija za adijabatski proces

$$\begin{aligned} p_a V_a^\gamma &= p_b V_b^\gamma \\ p_c V_c^\gamma &= p_d V_d^\gamma \end{aligned} \tag{0.31}$$

i jednadžbe stanja idealnog plina $pV=nRT$ iz koje se izrazi p i uvrsti u (0.31) čime se dobije

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1} \overset{V_a=rV,\,V_b=V}{\Rightarrow} T_b = T_a r^{\gamma-1} \;\; \textbf{[2 boda]} \qquad (0.32)$$

a slično i za $T_c = r^{\gamma-1} T_d$ pa jednadžba (0.30) postaje

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \;\; \textbf{[2 boda]} \qquad (0.33)$$

b) Uz r=8 treba uzeti i γ=7/5=1.4 (zrak se uglavnom sastoji od dvoatomnih molekula N_2 i O_2) pa je

$$e_{\text{teorija}} = 1 - \frac{1}{8^{0.4}} \approx 0.56 \;\; \textbf{[1 bod]} \qquad (0.34)$$

tj. iskoristivost od 56 %.