Zadaci za županijsko natjecanje 2017. – 3. skupina

Zadatak 1 (10 bodova)

Čelični puni valjak površine baze $A = 30$ cm^2 i mase $m = 2.7$ kg, te gustoće $\rho_s = 8\,000$ kg/m^3 je uronjen u čašu sa živom gustoće $\rho_m = 13\,600$ kg/m^3 tako da mu je baza postavljena horizontalno. Živa ima jako malu viskoznost pa možemo zanemariti trenje i valove unutar tekućine, a za ovaj zadatak zanemarujemo i napetost površine.

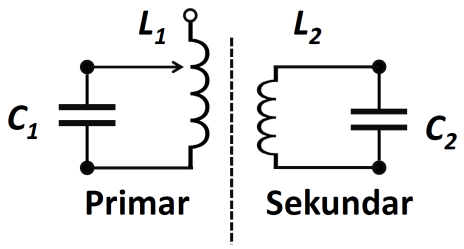
a) Izrazi ravnotežnu dubinu h_0 do koje će valjak biti uronjen preko zadanih gustoća i visine valjka H, te izvrijedni za dane vrijednosti.

b) Valjak poguramo za x malo dublje od ravnoteže tako da mu je dubina $h = h_0 + x$. Nađi vrijeme potrebno da se valjak vrati u ravnotežni položaj! Hoće li tamo ostati?

Zadatak 2 (10 bodova)

Teslina zavojnica se može promatrati kao visokonaponski transformator. Sastoji se od dva strujna kruga, primarnog i sekundarnog, međusobno povezanim preko indukcije zavojnica.

Primarni strujni krug se sastoji od kondenzatora kapaciteta $C_1 = 32$ nF i zavojnice promjenjivog induktiviteta – pomicanjem kontakne žice mijenjamo duljinu zavojnice i broj namotaja. Promjer zavojnice je $d_1 = 1$ m, a duljina zavojnice po namotaju $l_1/N_1 = 1$ cm. Sekundarni strujni krug se sastoji od kapaciteta $C_2 = 2$ pF i zavojnice sa $N_2 = 20\,000$ namotaja, promjera $d_2 = 0.2$ m i duljine $l = 0.5$ m.



Budući da nema željezne jezgre koja povezuje dva strujna kruga, prijenos magnetskog toka iz jedne zavojnice u drugu je vrlo malen. Međutim, efikasni prijenos energije se postiže rezonancijom, kada primarni strujni krug rezonira na istoj frekvenciji kao i sekundarni. Tada se sva energija primarnog kruga prenosi na sekundarni.

a) Nađi položaj kontakta (tj. broj navoja primarne zavojnice N_1) da bi primarni strujni krug rezonirao na istoj frekvenciji kao i sekundarni!

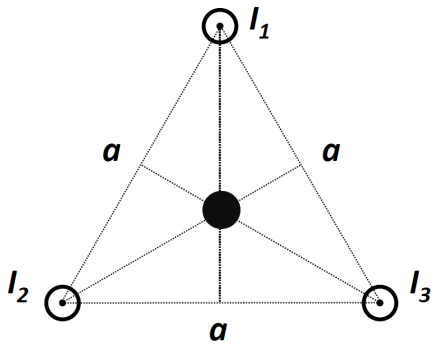
b) Ako je amplituda napona na kondenzatoru primara $V_1 = 320$ V i ako je prijenos energije potpun, kolika je amplituda napona na sekundaru?

Konstanta permeabilnosti $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Zadatak 3 (10 bodova)

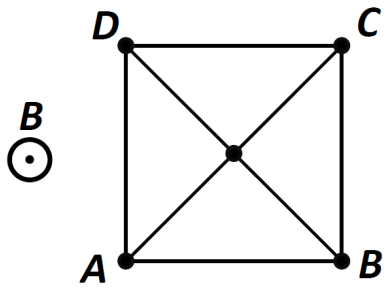
Negativni naboj $q = -5$ mC, mase $m = 1$ g putuje brzinom $v = 10^6$ m/s u vakuumskoj komori između tri beskonačne žice. Položaj žica odgovara vrhovima jednakostraničnog trokuta duljine stranice $a = 1$ cm, a naboj se nalazi na sjecištu simetrala stranica (slika). Smjer brzine naboja je isti kao i smjer protezanja žice.

U nekom trenutku kroz žice poteče struja $I_1 = 0.5I_0$, $I_2 = I_3 = I_0 = 5$ A. Smjer gibanja svih struja je identičan smjeru gibanja naboja. Po kojoj ravnini će se naboj gibati i u kojem smjeru će biti početna akceleracija? Izračunajte iznos početne akceleracije!
Uzimamo da struja poteče žicama u potpuno istom trenu, da su žice učvršćene tako da se ne mogu pomicati, magnetska sila je dovoljno jaka da možemo zanemariti gravitacijsku silu i brzine su dovoljno male da nema relativističkih efekata. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.



Zadatak 4 (10 bodova)

Od žice linijskog otpora $\lambda = 1\ \Omega/\text{m}$ je napravljen kvadrat stranice $a = 10$ cm s pripadnim dijagonalama (slika). Na dijagonalno suprotne vrhove (između točaka A i C) je narinut napon $U = 5$ V tako da je točka A na većem potencijalu. Uspostavljeno je i magnetsko polje $B = 1$ T okomito na površinu kvadrata. Nađi smjer struje kroz sve žice i iznos i smjer sile na svaku žicu i na cijeli kvadrat.



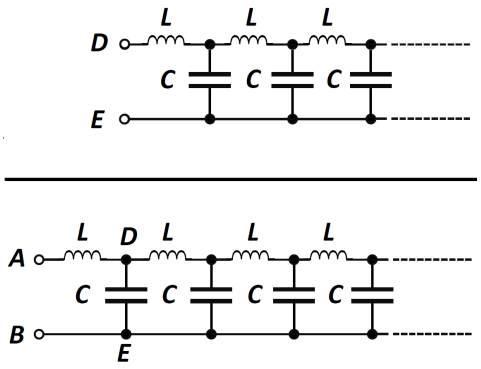
Zadatak 5 (10 bodova)

Zadan je beskonačni LC strujni krug DE kao na gornjoj slici. Tom strujnom krugu smo potom dodali još jedan segment tako da tvori ukupni strujni krug AB (donja slika).

a) Impedancija gornjeg kruga između točaka D i E je Z_{DE}. Izrazi impedanciju donjeg kruga između A i B preko impedancije kondenzatora Z_C, zavojnice Z_L i Z_{DE}.

b) Element zavojnica – kondenzator je osnova od koje smo sagradili ovaj beskonačni krug. U dijelu pod "a)" smo beskonačnom broju elemenata u krugu DE dodali još jedan element. Razmislite je li se i kako promijenila impedancija ukupnog kruga AB od prijašnjeg DE. Na temelju toga, izračunaj ukupnu impedanciju Z_{AB} i izrazi je preko ω, L i C.

c) Za koje frekvencije je realni dio impedancije nula?



Zadaci za županijsko natjecanje 2017. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Sile koje djeluju na valjak su sila gravitacije F_G i sila uzgona F_{uz} zbog dijela valjka koji je uronjen u živu. Označimo ukupnu visinu valjka s H, a visinu valjka koji je u živi s h. Tada su dvije sile, izražene preko volumena kao $V = A \cdot h$:

$$F_G = mg = \rho_s AHg \quad ; \quad F_{uz} = \rho_m Ahg$$

Iz veze mase, gustoće i površine baze valjka dobijemo visinu: $H = \frac{m}{\rho_s A} = 11.25$ cm.

a) U slučaju ravnotežne dubine h_0 sila gravitacije i sila uzgona su jednake po iznosu i suprotnog smjera. Iz toga možemo naći ravnotežnu dubinu:

$$h_0 = H\frac{\rho_s}{\rho_m} = 6.62 \text{ cm}$$

(2 boda)

b) Pomaknemo li valjak iz ravnoteže, postojat će sila na njega koja će ga htjeti vratiti u ravnotežu. Napišemo li jednadžbu za akceleraciju, gdje smo iskoristili vezu mase i gustoće i gore određen izraz za h_0:

$$ma = F_G - F_{uz}$$
$$a = -g\frac{\rho_m}{\rho_s\, H}\, x$$

(2 boda)

Primjetimo da izraz za akceleraciju pokazuje da se radi o gibanju harmoničkog oscilatora. To znači da će trebati četvrtina perioda oscilacije da se valjak vrati u ravnotežu.

(2 boda)

vidimo da su kutna frekvencija i period ovog harmoničkog gibanja dani s:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h_0}} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h_0}{g}}$$

Za kraj moramo povezati h_0 sa masom i bazom. Vrijedi da je ukupna masa valjka dana s $m = \rho_s AH$ pa je stoga $H = m/(\rho_s A)$. Zato je $h_0 = m/(\rho_m A)$, pa je izraz:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_m\, A\, g}} = 0.516 \text{ s}$$

Odnosno, konačno rješenje je $t = T/4 = 0.129$ s. **(3 boda)**

Valjak neće ostati u ravnotežnom položaju, nego će nastaviti s oscilacijama. **(1 bod)**

Zadatak 2 (10 bodova)

Prvo moramo naći rezonantnu frekvenciju sekundarnog kruga. Kako je to LC serijski krug, njegova rezonancija je $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

Iz podataka o zavojnici sekundara ($N_2 = 20\,000$, $S_2 = 0.1^2\pi$ m^2, $l = 0.5$ m) računamo njen induktivitet

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S_2}{l_2} = (31.5827\ \mathrm{H})$$

I iz toga frekvenciju:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2}} = \sqrt{\frac{l_2}{\mu_0 N_2^2 S\ C_2}} = (125\,823\ \mathrm{rad/s})$$

Brojevi su u zagradama za provjeru rezultata, no nije potrebno da ih učenik napiše.

(2 boda)

Primar je također LC krug, i ovdje pišemo induktivitet zavojnice, uz prebacivanje člana N_1 zbog zadanog podatka l_1/N_1:

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l_1} = \frac{\mu_0 N_1 S}{(l_1/N_1)}$$

Nazivnik je zadani broj, pa je jedina varijabla N_1 u brojniku. Uvrštavanjem u ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}} = \sqrt{\frac{(l_1/N_1)}{\mu_0 N_1 S_1\ C_1}}$$

Izjednačavanjem ove dvije frekvencije možemo naći izraz za N_1:

$$N_1 = \frac{(l_1/N_1)\, N_2^2 S_2 C_2}{l_2 S_1 C_1} = 20$$

(4 boda)

U LC krugu struja i napon osciliraju. Kada je na kondenzatoru napon maksimalan, struja je nula (struja je upravno nabila kondenzator i sada slijedi pražnjenje). Sva energija oscilatornog kruga je pohranjena u kondenzatoru, tako da je

$$E_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$

Isto vrijedi i za drugi krug, pa ako pretpostavimo da je prijenos energije potpun ($E_1 = E_2$), tada će maksimalni napon u drugom krugu biti

$$E_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{C_2}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\, V_1 = 40.48\ \mathrm{kV}$$

(4 boda)

Zadatak 3 (10 bodova)

Magnetsko polje beskonačne žice je dano s iznosom $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ i smjerom preko pravila desne ruke. **(1 bod)**

Iz geometrije jednakostraničnog trokuta znamo da se simetrale stranica sjeku na 2/3 svoje visine, a visina je $a\sqrt{3}/2$, stoga je udaljenost naboja od svake žice $r = \frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1 bod)

Postavimo li koordinatni sustav s ishodištem točno gdje je naboj, tako da y os gleda prema žici I_1, tada je x os vodoravna na papiru, i sada možemo napisati magnetska polja kao vektore.

$$\vec{B}_1 = \frac{3\mu_0 I_1}{2\sqrt{3}\pi a}\,\vec{i}$$
$$\vec{B}_2 = \frac{3\mu_0 I_2}{2\sqrt{3}\pi a}(-\vec{i}\sin 30^\circ + \vec{j}\cos 30^\circ)$$
$$\vec{B}_2 = \frac{3\mu_0 I_3}{2\sqrt{3}\pi a}(-\vec{i}\sin 30^\circ - \vec{j}\cos 30^\circ)$$

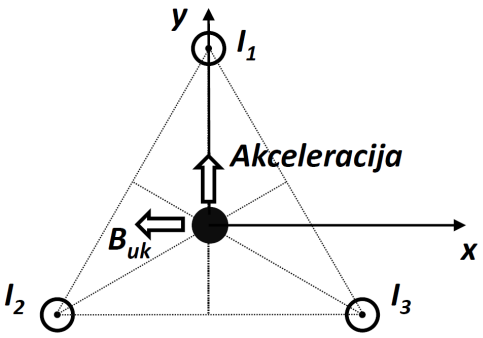
(2 boda)

Ukupno magnetsko polje je tad vektorski zbroj. Budući da su $I_2 = I_3 = I_0$, vidimo da će se $\vec{j}$ komponente pokratiti te će ostati samo $\vec{i}$ komponente:

$$B_x = \frac{3\mu_0 I_0}{2\sqrt{3}\pi a}(0.5 - (1+1)\sin 30^\circ) = -\frac{3\mu_0 I_0}{4\sqrt{3}\pi a}$$

(2 boda)

Naboj q će se gibati u ravnini okomitoj na magnetsko polje, odnosno ravnini okomitoj na x os koordinatnog sustava. Početni smjer akceleracije nađemo po pravilu desne ruke, imajući u vidu da je naboj negativan: pozitivan smjer y-osi.



(2 boda)

Sila na naboj se dobije po $F = qvB$, pa je akceleracija $a = \frac{qvB}{m}$. Izvrjednjavanjem dobijemo za akceleraciju: $a = 433$ m/s^2.

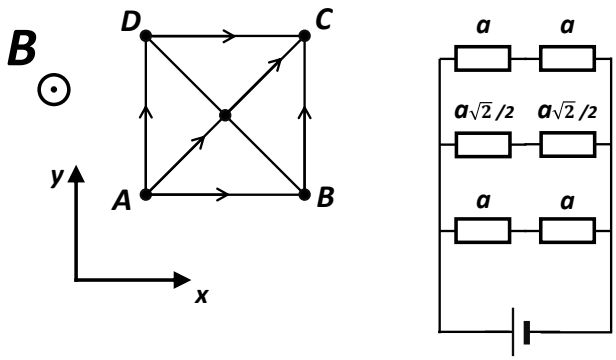
(2 boda)

Usputne veličine u računu su: $B = 8.66 \cdot 10^{-5}$ T, $F = 0.433$ N.

Zadatak 4 (10 bodova)

Struja će teći od točke A do točke C. U točkama B i D je zbog simetrije pad napona jednak, pa struja neće teći tom žicom. Skiciramo ekvivalentnu shemu, sa 6 otpornika koji predstavljaju 4 stranice i dijagonalu AC razrezanu na pola. Otpor svakog dijela žice duljine l je $R = \lambda l$, što znači da su vrijednosti otpora redom:

$$R_1 = R_2 = R_5 = R_6 = \lambda a$$
$$R_3 = R_4 = \lambda a\sqrt{2}/2$$



(3 boda)

Struja kroz žicu AD i CD je: $I_{AD} = I_{CD} = \frac{U}{R_1+R_2} = 25$ A.
Struja kroz žicu AB i BC je: $I_{AB} = I_{BC} = \frac{U}{R_5+R_6} = 25$ A.
Struja kroz dijagonalu AC je: $I_{AC} = \frac{U}{R_3+R_4} = 35.36$ A.

(3x1 bod)

Sila na žicu zbog magnetskog polja je dana s $F = BIl$, a smjer je dan vektorskim produktom smjera struje i magnetskog polja. Magnetsko polje je uvijek okomito na smjer struje. Postavljamo koordinatni sustav tako da je x-os u smjeru AB, a y u smjeru AD.
Sila na žice AD i BC je $F_{AD} = F_{BC} = BI_{AD}\, a = 2.5\,\hat{i}$ N u x smjeru.
Sila na žice AB i CD je $F_{AD} = F_{CD} = BI_{CD}\, a = -2.5\,\hat{j}$ N u y smjeru.
Sila na dijagonalu AC je $F_{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} BI_{AC}\, a\sqrt{2} = 3.536\,\hat{i} - 3.536\,\hat{j}$ N , $|F_{AC}| = 5$ N.

(3x1 bod)

Ukupna sila na kvadrat je u smjeru dijagonale DB i iznosi:

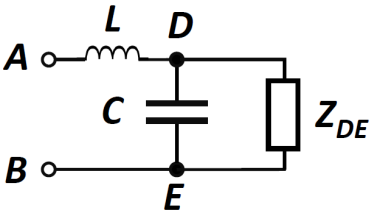
$$F_{uk} = 8.536(\hat{i} - \hat{j})\ \text{N}$$

ili po ukupnom iznosu $|F_{uk}| = 12.07$ N.

(1 bod)

Zadatak 5 (10 bodova)

a) Prepoznajemo da donji krug AB možemo prikazati uz pomoć impedancije gornjeg kruga DE, kao na slici:



Ukupna impedancija cijelog strujnog kruga je:

$$Z_{AB} = Z_L + Z_C || Z_{DE} = Z_L + \frac{Z_C Z_{DE}}{Z_C + Z_{DE}} \text{ ili } Z_L + \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_{DE}}}$$

Oznaku || smo koristili za označavanje paralelnog spoja impedancija. **(3 boda)**

b) Dodavanjem jednog segmenta beskonačnom nizu segmenata ne mijenja ukupnu impedanciju. Dakle, $Z_{AB} = Z_{DE}$. Iz toga slijedi:

$$Z_{AB} = Z_L + \frac{Z_C Z_{AB}}{Z_C + Z_{AB}} \quad \Rightarrow \quad Z_{AB}^2 - Z_L Z_{AB} - Z_L Z_C = 0$$

Rješenje ove kvadratne jednadžbe je, uz uvrštavanje $Z_L = i\omega L$ i $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$:

$$Z_{AB} = \frac{i\omega L}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-\omega^2 L^2 + 4L/C}$$

Budući da realni dio impedancije (onaj pod korijenom) mora biti pozitivan, odabiremo + predznak.

(4 boda)

c) Da bi realni dio impedancije bio nula, mora vrijediti:

$$-\omega^2 L^2 + 4L/C \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega \geq \sqrt{\frac{2}{LC}}$$

Za samo jedno rješenje ($\omega = \ldots$) dodjeljuje se **1 bod**.

Za potpuno rješenje ($\omega \geq \ldots$) dodjeljuju se **3 boda**.