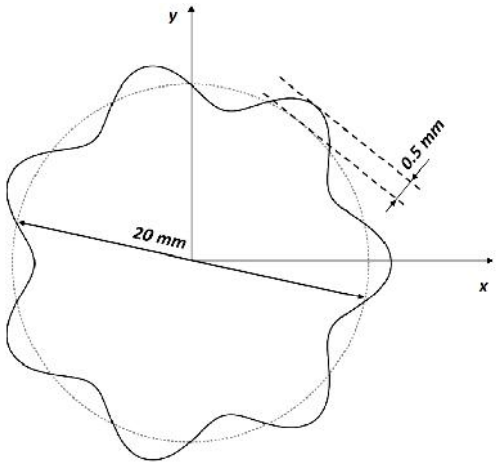
Državno natjecanje iz fizike, Pula, 17.-20. travnja 2018.
Zadaci – 3. skupina

Zadatak 1 (16 bodova)

Na tankom prstenu radijusa $R = 10$ mm se formira transverzalni stojni val kao na slici. Valnu jednadžbu možemo zapisati kao udaljenost prstena od središta u ovisnosti o vremenu t i kutu φ:

$$r(t, \varphi) = R + a \cos(kR\varphi) \cos(\omega t)$$

a) Iako ovaj val nema rub, i dalje postoji jedan uvjet koji određuje njegove prirodne frekvencije titranja. Napiši općenito koje su vrijednosti valnog broja k dozvoljene i nađi najmanji k.
b) Nađi vrijednost parametara a i k koji odgovaraju stojnom valu sa slike.
c) Stojni val je nastao na prstenu interferencijom dva 'ravna' vala koji su se gibali u suprotnim smjerovima. Nađi faznu brzinu tog jednog vala u prstenu ako je za dani k iz (b) frekvencija $f = 540$ kHz.



Zadatak 2 (15 bodova)

Avionski radar prati avion. Radar radi tako da odašilje kratki puls elektromagnetskog zračenja frekvencije $f = 2.4$ GHz. Puls putuje od radara, udara u avion ili neki drugi objekt u zraku i odbija se natrag. Radar zabilježi položaj iz kojeg se vratio puls, koliko je prošlo između odašiljanja i povratka pulsa, te frekvenciju povratnog pulsa. Nakon odaslanog pulsa isti se vratio pod kutem od $\alpha = 20°$ u odnosu na horizontalu, nakon $\tau = 0.2$ ms, sa frekvencijom koja je viša za $\Delta f = 3.8$ kHz.

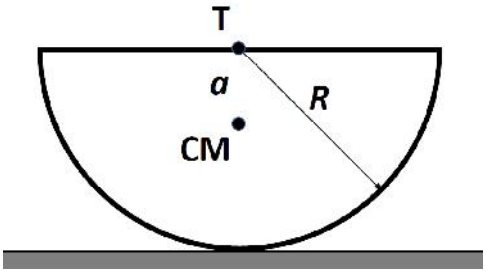
Nađi visinu aviona H, horizontalnu udaljenost aviona D i brzinu aviona $\vec{v}$, ako znamo da je brzina horizontalna (avion leti na istoj visini, ne spušta se i ne diže).

Napomena: Promjena frekvencije se promatra u istom referentnom sustavu (radar), stoga ne treba koristiti nikakve relativističke formule! Brzina elektromagnetskog zračenja je $c = 3 \cdot 10^8$.

Zadatak 3 (19 bodova)

Poluvaljak mase m i radijusa R kao na slici stoji na stolu. Centar mase poluvaljka (CM) je udaljen $a = \frac{4R}{3\pi}$ od točke T središta ravne plohe. Nađi period malih oscilacija tog poluvaljka. Iskoristi aproksimaciju malih kuteva:

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

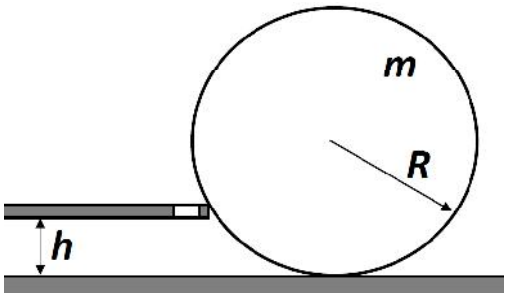


Zadatak 4 (20 bodova)

Monika udara biljarsku kuglu štapom na visini $h = R/5$. Tik nakon udara, kugla se počne gibati (bez odskakanja) tako da joj brzina centra mase iznosi $v_0 = 0.5$ m/s. Bilijarska kugla ima masu $m = 0.2$ kg i promjer $d = 50$ mm.

a) Nađi brzinu rotacije kugle ω_0 iz sustava centra mase kugle tik nakon Monikinog udara!
b) Nađi brzinu centra mase $v(t)$ i kutnu brzinu iz sustava centra mase $\omega(t)$ tokom cijelog gibanja. Skiciraj $\omega - t$ i $v - t$ grafove! Koja je konačna brzina kugle?

Koeficijent trenja dodirne točke kugle i stola je $\mu = 0.03$ a moment inercije kugle je $I = \frac{2}{5}mR^2$. Trenje kotrljanja zanemarujemo.



VAŽNO:
Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Državno natjecanje iz fizike, Pula, 17.-20. travnja 2018.
Rješenja i smjernice za bodovanje – 3. skupina

Zadatak 1 (16 bodova)

a) Ono što mora vrijediti za val na kružnom prstenu jest da kada napravimo puni krug ($\varphi = 2\pi$) valna funkcija ima isti oblik (tzv. kružni uvjet, za razliku od rubnog uvjeta). Postavljamo:

$$r(t, \varphi) = r(t, \varphi + 2\pi)$$

Ovaj uvjet se svodi na jednakost kosinusa (jer jedino on ovisi o φ):

$$\cos(kR\varphi) = \cos(kR\varphi + 2kR\pi)$$

Zaključujemo da mora vrijediti:

$$2kR\pi = 2n\pi \; ; n \in \mathbb{N}$$

(4 boda)

Dozvoljena veličina valnog broja $k = n/R$, a minimalni $k = 1/R = 100$ m^{-1}. **(2 boda)**

b) Iščitavajući jednadžbu, vidimo da val oscilira oko radijusa R, amplitudom a, pa je $a = 0.5$ mm. **(2 boda)**

Slično, iz općenitog oblika za veličinu k možemo zaključiti da je broj n ujedno i broj "grba" vala, pa iz slike vidimo $n = 7$, tj. $k_7 = 700$ m^{-1} **(4 boda)**

c) Fazna brzina vala c se može naći iz relacije $\omega = ck$. Imamo $c = 2\pi f/k = 4\,847$ m/s. **(4 boda)**

Zadatak 2 (15 bodova)

Elektromagnetsko zračenje se širi kroz prostor brzinom svjetlosti. Ako je puls odaslan, odbijen od aviona i vratio se za τ, tada je udaljenost od radara do aviona:

$$2L = c\tau$$

(2 boda)

Faktor 2 je stoga što je puls morao doći do aviona i potom se vratiti. Iz ove relacije imamo $L = 30$ km. **(2 boda)**

Budući da poznajemo kut pod kojim radar vidi avion, možemo zamisliti pravokutni trokut gdje je hipotenuza L zračna udaljenost od aviona, a H i D su dvije katete, jedna je horizontalna udaljenost a druga visina aviona. Trigonometrijskim relacijama imamo:

$$H = L \sin\alpha = 10.3 \text{ km}$$

$$D = L \cos\alpha = 28.2 \text{ km}$$

(3 boda)

Brzinu aviona možemo dobiti iz dopplerovog efekta. Budući da se radi o odbijanju signala i povratku nazad, vrijedi ukupna relacija **(3 boda)**

$$f_1 = \frac{c+v}{c-v} f_0$$

Brzina je projekcija ukupne brzine aviona na pravac koji spaja avion s radarom: $v = v_A \cos\alpha$. **(2 boda)**

Izraz reorganiziramo:

$$v_A \cos\alpha = \frac{f_1 - f_0}{f_0 + f_1}\, c$$

(2 boda)

Konačno, $v_A = 253$ m/s $= 910$ km/h. **(1 bod)**

Zadatak 3 (19 bodova)

Za naći period oscilacija krutog tijela prvo je potrebno naći njegov moment tromosti oko točke rotacije. Ono što znamo je teorem o paralelnim osima s kojim možemo odrediti bilo koji moment u odnosu na moment centra mase. Drugo što znamo je moment tromosti oko točke T, budući da je ta točka ujedno i središte punog valjka.

$$I_T = \frac{1}{2} I_{valj} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2m)R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

Iskoristili smo činjenicu da bi puni valjak imao duplo veću masu. **(2 boda)**

Sada pišemo iz teorema o paralelnim osima: **(2 boda)**

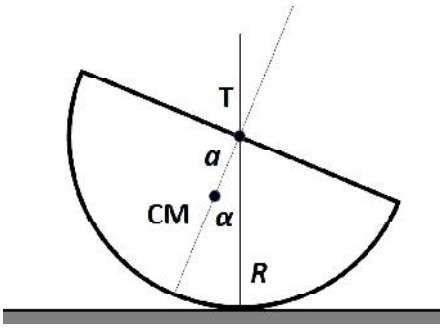
$$I_T = I_{CM} + ma^2 \Rightarrow I_{CM} = I_T - ma^2$$

Poluvaljak se rotira oko točke s kojom dodiruje tlo (točka P). Drugi put koristimo teorem o paralelnim osima za: **(2 boda)**

$$I_P = I_{CM} + m(R-a)^2 = I_T - ma^2 + m(R-a)^2 = I_T + mR^2 - 2maR$$

Konačno, $I_P = mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)$. **(2 boda)**

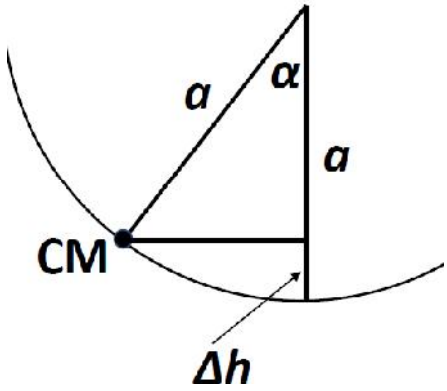
Za period oscilacija moramo promotriti što se događa pri malom pomaku poluvaljka. Najlakše je promatrati ukupnu energiju poluvaljka koja je jednaka zbroju kinetičke rotacijske energije E_{rot} i gravitacijsko potencijalne energije centra mase E_G.



Uzmimo da je u ravnoteži centar mase na visini $h = 0$. Ako pomaknemo tijelo za kut α, kao na slici, centar mase se podigne za visinu Δh, koja se nađe iz trigonometrije:

$$\Delta h = a - a\cos\alpha$$

(2 boda)



Koristeći aproksimacije malih kuteva, slijedi da je energija

$$E_G = mg\Delta h = mg(a - a + a\frac{\alpha^2}{2})$$

(2 boda)

Ukupna energija je tada:

$$E = \frac{1}{2}I_P\omega^2 + \frac{1}{2}mga\alpha^2$$

(2 boda)

Ovaj oblik energije možemo usporediti s energijom harmoničkog oscilatora

$$E_{HO} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

gdje je kružna frekvencija dobivena iz $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Na sličan način tražimo kutnu frekvenciju našeg oscilatora:

$$\omega^2 = \frac{mga}{I_P} = \frac{mg4R}{3\pi mR^2\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)} = \frac{4}{3\pi\left(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\right)}\frac{g}{R}$$

(3 boda)

Period je sada: **(2 boda)**

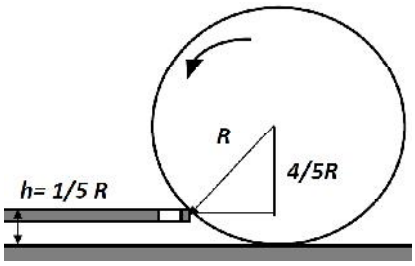
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(9\pi - 16)R}{8g}}$$

Zadatak 4 (20 bodova)

a) Prilikom udarca štapa u kuglu štap preda kugli količinu gibanja jednaku $p = mv_0$, gdje je v_0 početna brzina gibanja kugle nakon udara štapom.
Ujedno preda kugli i kutnu količinu gibanja koja će uzrokovati rotaciju obrnutu od smjera gibanja (slika). **(2 boda)**
Za kutnu količinu gibanja vrijedi

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = Rmv_0\sin\alpha$$

gdje je smjer "iz papira", a kut α se dobije iz pravokutnog trokuta na slici da je $\sin\alpha = \frac{4R/5}{R} = 4/5$. **(2 boda)**



Stoga je predana kutna količina gibanja:

$$L = \frac{4}{5} R m v_0$$

Iz poznavanja momenta tromosti kugle $I = \frac{2}{5} m R^2$, kružna brzina ω je:

$$I\omega_0 = L \ ; \ \ \omega_0 = \frac{2v_0}{R} = 40 \text{ rad/s}$$

(4 boda)

b) Da bi znali kako će se kugla gibati moramo promotriti dodirnu točku kugle sa tlom da bi odredili smjer sile trenja. Brzina dodirne točke kugle u odnosu na tlo jednaka je zbroju brzine centra mase kugle v i obodne brzine ωR: **(2 boda)**

$$v_T = v + \omega R$$

U početnu je jasno smjer sile trenja prema lijevo (jer se obje brzine zbrajaju u desno). To uzrokuje usporavanje linearnog i rotacijskog gibanja kugle: **(2 boda)**

$$ma = -F_{tr} \ ; \ \ I\alpha = -RF_{tr}$$

Za brzinu imamo:

$$v(t) = v_0 - \mu g t$$

Za kutnu brzinu imamo:

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2R} t$$

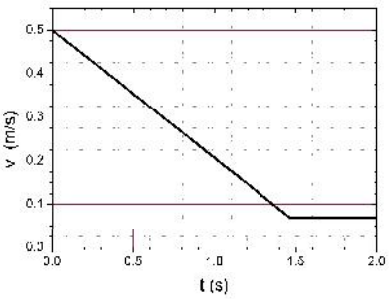
Pa možemo izraziti i obodnu brzinu:

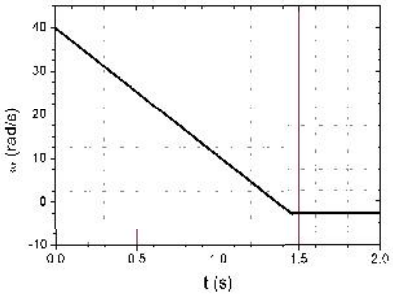
$$v_T(t) = R\omega_0 + v_0 - \frac{7}{2}\mu g t$$

(3 boda)

Kako vrijeme prolazi brzina v i ω linearno padaju do trenutka $\tau = 1.46$ s, kada je obodna brzina $v_T(\tau) = 0$. U tom trenu nema djelovanja sile trenja i nastupa kotrljanje bez proklizavanja. **(3 boda)**

Konačna brzina je $v(\tau) = 7.14 \cdot 10^{-2}$ m/s. **(2 boda)**





Državno natjecanje iz fizike
Pula, 17.-20. travnja 2018.

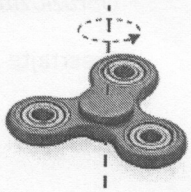
EKSPERIMENTALNI ZADATAK

3. skupina

1. dio

Pribor: metalni L profil (stalak), stegač, vijak M5, 6 matica i 4 podloška M5, (plastični vijak M8, 2 plastične matice), drvena letvica sa kugličnim ležajem i rupom promjera 8 mm, mjerna traka, (kutomjer), "fidget spinner", zaporni sat, vaga, gumena traka.

Na slici je prikazana popularna igračka "fidget spinner" ili vrtjelica. Ovaj model se sastoji od tri kraka i središta sa kugličnim ležajem koji omogućuje rotaciju igračke. Ležajevi pri vrhovima krakova su dodatne mase. Dodane su i kuglice ležajeva.



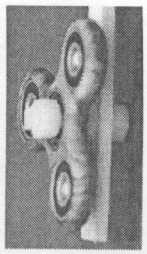
Zadatak. Pomoću zadanog pribora odredite moment tromosti vrtjelice s obzirom na os rotacije koja prolazi okomito kroz njezino središte, prikazano na slici. Moment tromosti treba odrediti uz što je više moguća pojednostavljenja.

Obrazložite koja su to pojednostavljenja i zašto se primjenjuju.

Opišite kako su mjerenja izvedena, koje ste fizikalne zakonitosti primijenjivali, koje fizikalne veličine mjerili kako bi sa zadanim priborom odredili moment tromosti vrtjelice.

Rezultate mjerenja prikažite tablično. Procijenite točnost mjerenja.

2. dio



Na drvenu letvicu sa kugličnim ležajem i rupom promjera 8 mm pričvrstite vrtjelicu pomoću plastičnog vijka. Postavite letvicu s vrtjelicom tako da se letvica njiše u vertikalnoj ravnini, oko osovine koja prolazi okomito kroz kuglični ležaj. Odredite period takvog njihala za dva slučaja: a) kada vrtjelica može rotirati oko plastičnog vijka i b) kada ste pomoću gumene vrpce onemogućili rotaciju vrtjelice oko plastičnog vijka.

Zadatak. Opišite i obrazložite opažanja u slučajevima kada za vrijeme njihanja vrtjelica može rotirati oko osi koja prolazi okomito kroz njezino središte i kada ona ne može rotirati. Rezultate prikažite tablično i procijenite točnost svojih mjerenja.

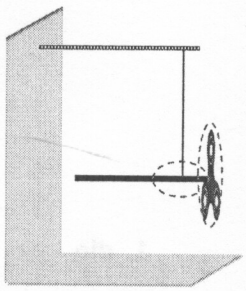
3. dio

Pribor: metalni L profil (stalak), stegač, navojna šipka promjera 5 mm, 4 matice i 2 podloška M5, nit konca, mjerna traka, fidget spinner, zaporni sat, vaga, šipka (drvena ili aluminijska) promjera 8 mm, vrtilo i kukica.

U prvom dijelu odredili ste moment tromosti "fidget spinnera", ovaj podatak će vam biti potreban u nastavku zadatka. Postavite vrtjelicu pažljivo na jedan kraj šipke promjera 8 mm tako da se ne može pomicati duž šipke.

Zavežite konac na šipku. Drugi kraj konca sa vrtilom i kukicom zakačite na kraj navojne šipke koju ste prethodno učvrstili na metalni L profil.

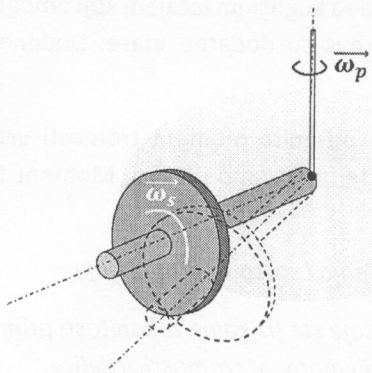
Nakon što ste zarotirali vrtjelicu oko osovine koja prolazi njezinim središtem, ovješena vrtjelica nastavi rotirati (precesija) i oko niti koja je učvršćena na svojem gornjem kraju. Precesija se mora koliko god je to moguće odvijati u horizontalnoj ravnini.



Zadatak. Vaš je zadatak u ovom dijelu, da na osnovu daljnjih mjerenja i poznatog momenta tromosti iz prvog dijela zadatka, odredite potreban broj okretaja vrtjelice kako bi ona izvodila precesijsko gibanje u horizontalnoj ravnini.

Obrazložite pomoću kojih fizikalnih veličina ćete izraziti kutnu brzinu precesije?

Precrtajte priloženi crtež. Pojednostavljenja radi umjesto vrtjelice nacrtan je disk.



Označite smjerove rotacija. Kao se smjerovi rotacija međusobno odnose?

Označite i imenujte na slici fizikalne veličine pomoću kojih ćete doći do jednadžbe u koju ćete uvrstiti svoje mjerne podatke kako bi odredili kutnu brzinu precesije. Ako se radi o vektroskim veličinama, označite i raspravite njihove smjerove!

Ukratko objasnite i sve fizikalne zakonitosti koje ste primjenjivali.

Raspravite rezultate svojih mjerenja. Opišite svoja opažanja uz izvođenje mjerenja.

Razmislite o poboljšanju eksperimentalne metode određivanja momenta tromosti vrtjelice i predložite neku drugu mogućnost mjerenja.

Državno natjecanje iz fizike
Pula, 17.-20. travnja 2018.

RJEŠENJE EKSPERIMENTALNOG ZADATKA

3. skupina

1. dio

U našem zadatku se radi o geometrijski složenom tijelu i njegov moment tromosti se određuje eksperimentalno, pomoću fizičkog njihala koje se njiše u vertikalnoj ravninini oko horizontalne osi koja ne prolazi njegovim težištem. Fizičko njihalo je svako kruto tijelo koje ima učvršćenu os rotacije oko koje može njihati pod utjecajem momenta gravitacijske sile.
Ako je os rotacije pomaknuta za *d* od težišta fizičkog njihala onda je period titranja njihala dan izrazom:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\ ,$$

gdje je ***I*** moment tromosti za danu os, ***m*** masa tijela, ***g*** akceleracija slobodnog pada i ***d*** udaljenost od težišta do osi rotacije. Iz te formule proizlazi da je moment tromosti fizikalnog njihala, s obzirom na horizontalnu os jednak:

$$\boldsymbol{I = \frac{mgdT^2}{4\pi^2}}$$

Mjerenjem perioda njihanja, mase tijela, određivanjem težišta tijela i mjerenjem udaljenosti između težišta i ovjesišta možemo odrediti moment tromosti tijela.

1 bod

Poučak o paralelnim osima (Steinerov poučak) omogućuje računanje momenta tromosti za bilo koju paralelnu os ako je poznat moment inercije s obzirom na os kroz središte mase:

$$\boldsymbol{I = I_{CM} + md^2},$$

gdje je $\boldsymbol{I_{CM}}$ moment tromosti za os kroz središte mase, ***I*** je moment tromosti s obzirom na paralelnu os, ***d*** je udaljenost između osi

Moment tromosti vrtjelice za os kroz središte mase određujemo pomoću izraza:

$$\boldsymbol{I_{CM} = \frac{mgdT^2}{4\pi^2} - md^2}$$

2 boda

U našem eksperimentalnom zadatku imamo složeno tijelo, tako da bi se poučak o paralelnim osima trebao primjenitii za vrtjelicu i za štap.
Međutim, sa zadanim eksperimentalnim postavom dolazi do velikih odstupanja od očekivanih mjerenja. Problem je što postoji i kuglični ležaj koji je potreban zbog smanjenja trenja kako bi se dobili bolji mjerni rezultati, ali i njegova masa pridonosi rezultatu mjerenja.
Zbog navedenih tehničkih ograničenja pri izvođenju mjerenja teško je razlučiti doprinose štapa, vijaka, ležaja u mjerenjima. Stoga je u zadatku traženo pojednostavljenje i treba ostati na takvoj razini razmatranja, a koja je dovoljno dobra s obzirom na očekivani rezultat eksperimentalnog zadatka.

1 bod

Korišteni su štapovi (drvene letve bez kugličnog ležaja) mase do 9 g, duljine oko 30 cm, i vrtjelice masa oko 49,2 g .

Primjer rezultata mjerenja:

m = 49,2g

d / m	t / s	T / s	I_{CM} / kgm^2
0,30	11,01	1,101	0,0000225
0,25	10,06	1,006	0,0000214
0,20	9,02	0,902	0,0000234
0,15	7,84	0,784	0,0000213
0,10	6,47	0,647	0,0000203

$\overline{I}_{CM}$ = **2,18·10^{-5} kgm^2**, ΔI_m = 0,0000016 kgm^2, r_m= 17%

4 boda

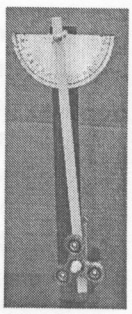
2. dio

m = 49,2 g
d = 30 cm

Vrtjelica učvršćena			
r.br.	t / s	T / s	ΔT / s
1.	10,76	1,076	0,003
2.	10,84	1,084	-0,005
3.	10,84	1,084	-0,005
4.	10,73	1,073	0,006
5.	10,72	1,072	0,007
6.	10,81	1,081	-0,002
7.	10,81	1,081	-0,002
8.	10,82	1,082	-0,003
9.	10,81	1,081	-0,002
10.	10,78	1,078	0,001
$\overline{T}$=1,079s, r_m=0,6%			

Vrtjelica slobodna			
r.br.	t / s	T / s	ΔT / s
1.	10,69	1,069	0,002
2.	10,68	1,068	0,003
3.	10,63	1,063	0,008
4.	10,72	1,072	-0,001
5.	10,72	1,072	-0,001
6.	10,75	1,075	-0,004
7.	10,66	1,066	0,005
8.	10,78	1,078	-0,007
9.	10,69	1,069	0,002
10.	10,78	1,078	-0,007
$\overline{T}$=1,071s, r_m=0,7%			

4 boda



Na osnovu rezultata mjerenja može se zaključiti da je period nešto manji u slučaju kada je vrtjelica tako postavljena da može rotirati oko okomite osi koja prolazi njezinim središtem.

Za vrijeme izvođenja ovog dijela eksperimentalnog zadatka opaža se da kad je vrtjelica postavljena na šipku tako da može rotirati oko vlastite osi, tijekom njihanja zapravo ostaje u istom položaju (s obzirom na opažača vezanog uz površinu Zemlje). Vrtjelica ne rotira oko svoje osi.

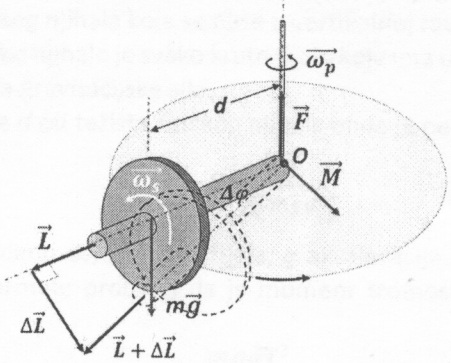
Na osnovu zakona očuvanja energije, kada se njihalo, odnosno sustav šipka-vrtjelica, giba prema svojem najnižem položaju, na račun smanjenja gravitacijske potencijalne energije povećava se rotacijska kinetička energija i središta mase sustava i vrtjelice. U ovom slučaju vrtjelica mora biti učvršćena. Ne rotira oko vlastite osi.

U slučaju da vrtjelica nije učvršćena i može rotirati oko osi koja prolazi okomito kroz njezino središte, bez trenja, jednako smanjenje gravitacijske potencijalne energije pretvara se u povećanje kinetičke energije rotacije središta mase šipke. Kako vrtjelica ne rotira oko vlastite osi, istovremeno je veće povećanje translacijske kinetičke energije središta mase sustava šipke-vrtjelica. Središte mase se giba brže i period je kraći.

3 boda

3. dio

Naša vrtjelica je zapravo zvrk. Zvrk je rotaciono simetrično tijelo koje se vrlo brzo vrti oko svoje osi simetrije. Zbog jednostavnosti prikaza umjesti vrtjelice na slici je nacrtan disk.



2 boda

Zarotiramo li tijelo oko osi prikazanoj na slici ono se nastavlja gibati oko čvrstog uporišta ili ovjesišta (O), ostajući stalno u horizontalnom položaju.

Kako je brzina rotacije osi malena u odnosu na brzinu rotacije tijela komponenta kutne količine gibanja koja dolazi od rotacije osi se može zanemariti.

Kutna količina gibanja zvrka $\vec{L}$ ima zato smjer osi rotacije zvrka i polagano rotira s njome oko točke O.

Iznos kutne količine gibanja jednak je: $L=I\omega_s$

gdje je I moment tromosti zvrka (fidget spinera) s obzirom na os rotacije, i ω_s kutna brzina rotacije zvrka.

Kako sila *F* u točki O nema momenta oko te točke, ukupni moment sila na zvrk dolazi od njegove težine $m\vec{g}$. Iznos tog momenta sile je: $M=mgd$,

gdje je d udaljenost centra mase zvrka od osi O. Smjer momenta sile $\vec{M}$ okomit je na smjer sile mg i osi rotacije.

Zbog djelovanja momenta sile dolazi do promjene kutne količine gibanja u vremenu Δt: $\vec{M}=\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$

Vektor promjene kutne količine gibanja (ili zamaha) $\overrightarrow{\Delta L}$, u okomitom je smjeru u odnosu na vektor kutne količine gibanja $\vec{L}$.

4 boda

Zvrk izvodi precesiju kutnom brzinom ω_p s obzirom na vertikalnu os.

Kut koji opiše os rotacije (vektor $\vec{L}$) u vremenu Δt iznosi: $\Delta\varphi=\frac{\Delta L}{L}$

Kutna brzina precesije jednaka je: