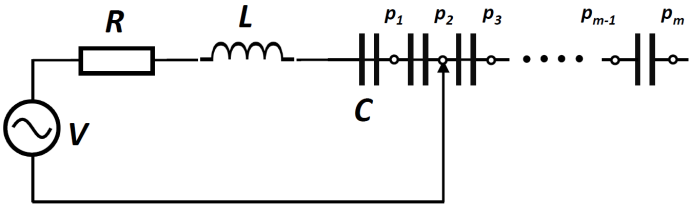
Zadaci za županijsko natjecanje 2018. – 3. skupina

Zadatak 1 (10 bodova)

Strujni krug prikazan na slici se sastoji od izvora izmjenične struje amplitude $V_0 = 40$ V, frekvencije $f = 51.2$ kHz, paralelno spojenih otpornika $R = 1$ kΩ, zavojnice $L = 5$ mH i niza kondenzatora $C_1 - C_N$, svaki kapaciteta $C = 10$ nF. Sa pomičnim kontaktom možemo zatvoriti strujni krug u točki $n \in [1, m]$,$m = 30$.

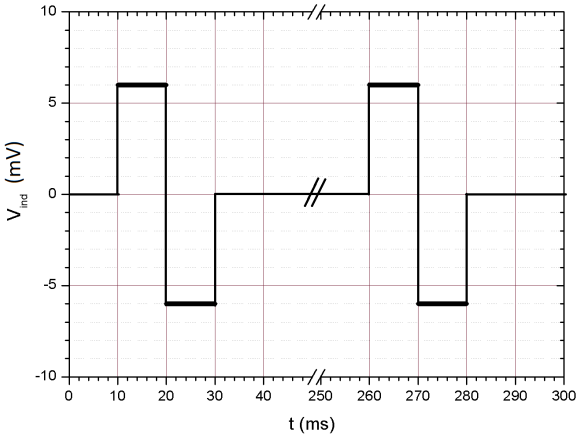
a) Nađi izraz za iznos i fazu struje I u krugu (izrazi preko vrijednosti R, ω, L, C, n)!

b) Za koji cjelobrojni n je srednja snaga disipirana na otporniku: a) maksimalna; b) minimalna i koja je to snaga?



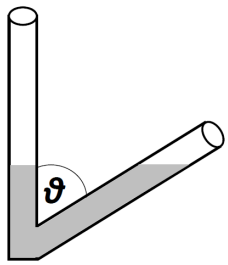
Zadatak 2 (10 bodova)

Na prednjem kotaču bicikla, promjera 70 cm je namontiran brzinomjer. Brzinomjer se sastoji od zavojnice s $N = 100$ namotaja, presjeka $A = 1$ cm^2, koja je montirana na okvir bicikla. Na kotaču se nalazi mali permanentni magnet koji, kako se kotač okreće, u svakom krugu prođe blizu zavojnice. Inducirani napon u zavojnici je prikazan na grafu (obratite pozornost na prekid apscise, gdje je napon jednak nuli). Nađi brzinu bicikla v i maksimalno magnetsko polje u zavojnici B. Skiciraj graf magnetskog polja u zavojnici u ovisnosti o vremenu.



Zadatak 3 (10 bodova)

Živa se nalazi u savijenoj cijevi kao na slici, čiji je jedan krak pod kutem $\vartheta = 60°$ u odnosu na vertikalnu os. Nađi period oscilacija za male pomake žive u ovoj cijevi. Masa žive je $m = 200$ g, gustoća $\rho = 13.5$ g/cm^3, a presjek cijevi $S = 0.5$ cm^2. Zanemarite viskoznost žive.



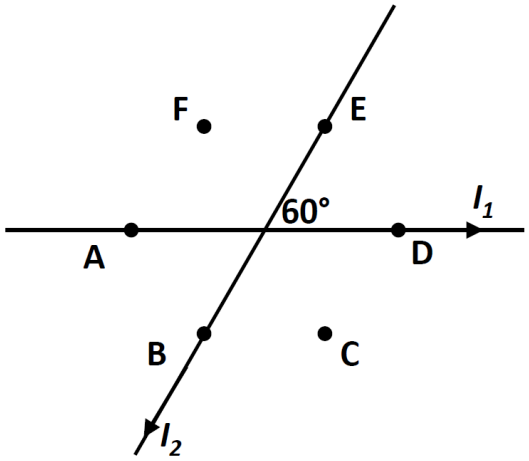
Zadatak 4 (10 bodova)

Dvije beskonačne žice su položene u ravnini međusobno pod kutem $60°$ kao na slici. Jednom žicom teče struja $I_1 = 5$ A, a drugom $I_2 = 5\sqrt{3}$ A.

a) Nađi smjer i iznos magnetskog polja u točkama A,B,C,D,E,F koje međusobno tvore pravilni šesterokut. Udaljenost između dvije susjedne točke (stranica šesterokuta) je $a = 1$ mm.

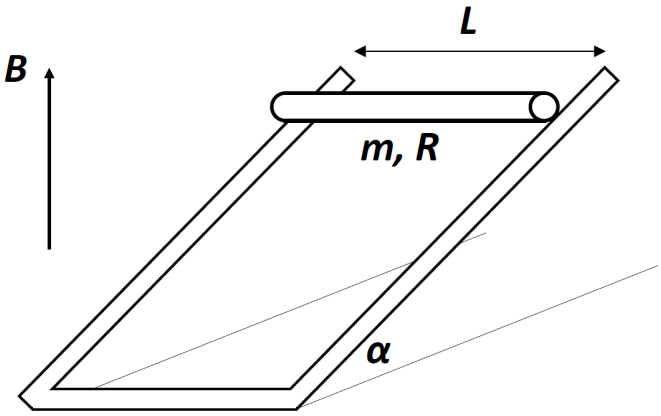
b) Nađite pravac na kojem magnetsko polje iščezava. Koji kut zatvara sa žicom I_1?

Napomena: U nijednoj točki magnetsko polje nije beskonačno!



Zadatak 5 (10 bodova)

Vodljiva šipka mase $m = 3$ kg, duljine $L = 1$ m i otpora $R = 0.2\ \Omega$ položena je na kosinu napravljenu od dvije tračnice zanemarivog otpora koje s horizontalom zatvaraju kut $\alpha = 45°$. Magnetsko polje $B = 1$ T je okomito prema gore. Šipka može slobodno kliziti po tračnicama bez mehaničkog trenja i ne rotira se. Koja je granična brzina šipke v? Za koliko se poveća temperatura šipke u jednoj sekundi, ako je toplinski kapacitet šipke $c_p = 0.39$ kJ/kgK?



VAŽNO:
Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Zadaci za županijsko natjecanje 2018. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Ukupni kapacitet je zbroj n serijski spojenih kondenzatora istog iznosa pa se lako dođe do izraza

$$C_{uk} = \frac{C_1}{n}$$

(1 bod)

Ukupna impedancija kruga je serijski spoj tri impedancije:

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L = R + i\left(\omega L - \frac{n}{\omega C}\right)$$

i po iznosu je:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{n}{\omega C}\right)^2}$$

a) Struja u krugu je:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{n}{\omega C}\right)^2}}$$

(1 bod)

i s naponom na izvoru zatvara fazu:

$$\tan\varphi = \frac{\left(\frac{n}{\omega C} - \omega L\right)}{R}$$

(1 bod)

b) Snaga disipirana na otporniku R je dana izrazom:

$$P = V_R I = I^2 R = \frac{V^2 R}{R^2 + \left(\frac{n}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

(1 bod)

Iz izraza je očito da će snaga biti maksimalna za što manji nazivnik. Budući da je R fiksna vrijednost, brojnik će biti najmanji ako je izraz u zagradi najmanji. Kako je u rezonanciji $\omega = \sqrt{n/LC}$, tako je taj izraz najmanji ako smo najbliže rezonanciji.

(2 boda)

Nađimo za koji n je krug u rezonanciji:

$$n = (2\pi f)^2 L C_1 = 5.17$$

(1 bod)

Kako je n cijeli broj, najbliže rezonanciji smo za $n = 5$. **(1 bod)**

U tom slučaju je kapacitet $C_5 = 2$ nF, i ukupna snaga je: $P_5 = 1.595 \approx 1.6$ W. **(1 bod)**

Slično, za najmanju snagu mora nazivnik biti što veći, a budući da raste s vrijednosti n, minimalna snaga je za $n = m = 30$. Snaga je tada: $P_{30} = 26.4$ mW. **(1 bod)**

Zadatak 2 (10 bodova)

Kada se magnet približava zavojnici u zavojnici se inducira napon zbog porasta magnetskog polja. Kada se magnet udaljava od zavojnice napon koji se inducira je suprotnog predznaka – to vidimo na grafu. Razmak između dva signala odgovara vremenu jedne rotacije kotača. Za vrijeme jedne rotacije kotača bicikl prevali put jednak opsegu kotača. Stoga je brzina bicikla:

$$v = \frac{\pi d}{t} = 8.8 \text{ m/s} = 31.7 \text{ km/h}$$

(3 boda)

Za inducirani napon vrijedi:

$$V_{ind} = N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = NA\frac{\Delta B}{\Delta t}$$

(1 boda)

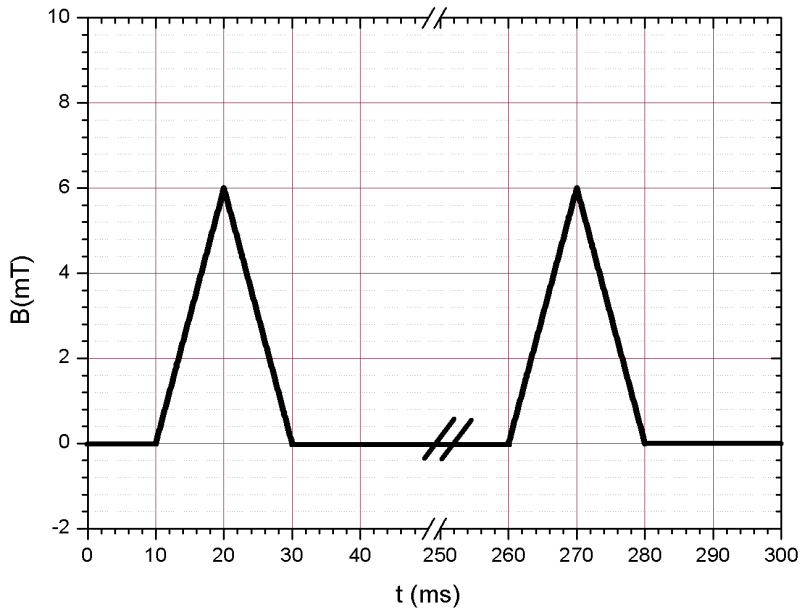
a budući da je napon konstantan, očekujemo da magnetsko polje raste linearno. Nagib tog pravca je upravo $\Delta B/\Delta t = 0.6$ T/s. **(2 boda)**

Iz duljine trajanja rasta magnetskog polja $t_p = 10$ ms možemo izračunati maksimalno magnetsko polje:

$$B_{max} = \frac{\Delta B}{\Delta t} t_p = 6 \text{ mT}$$

(2 boda)

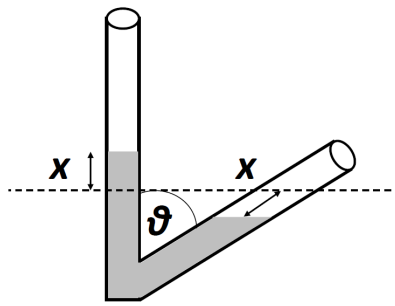
Graf magnetskog polja u vremenu je:



(2 boda)

Zadatak 3 (10 bodova)

Ravnotežno stanje tekućine je ono kod kojeg je razina tekućine ista u obje cijevi, kao na slici. Ako u vertikalnoj (lijevoj) grani u jednom trenu naraste visina tekućine za neki mali iznos x, tada u kosoj (desnoj) grani visina tekućine padne. Volumen tekućine je očuvan, što znači da ako smo lijevo povećali visinu žive za x, u desnoj cijevi se živa povukla za koordinatu x. Zbog činjenice da je cijev nagnuta, visina žive u desnoj grani se smanjila za $h = -x\cos\vartheta$. **(4 boda)**



Tlak lijevog stupca žive je veći od desnog, pa postoji razlika tlakova koja pokreće živu:

$$\Delta p = \rho g(h_0 + x) - \rho g(h_0 - x\cos\vartheta) = \rho g x(1 + \cos\vartheta)$$

(2 boda)

Razlika tlaka odgovara sili $F = \Delta p \cdot S$, pa možemo napisati jednadžbu gibanja za živu:

$$a = \frac{\Delta p \cdot S}{m} = -\frac{\rho S g(1 + \cos\vartheta)}{m}\, x$$

(2 boda)

Predznak minus je odabran jer za pozitivan otklon koordinate x znamo da će živa dobiti takvu akceleraciju da taj otklon smanji. Prepoznajemo izraz za akceleraciju harmoničkog oscilatora $a = -\omega^2 x$. Usporedbom dolazimo do perioda:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho S g(1 + \cos\vartheta)}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho S g(1 + \cos\vartheta)}} = 0.89\ \mathrm{s}$$

(2 boda)

Zadatak 4 (10 bodova)

Polje u žici je dano s relacijom:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

gdje je r udaljenost od žice.

Točka A se nalazi na žici I_1, stoga ne osjeća magnetsko polje od te žice, samo od žice I_2, od koje je udaljena (povućemo okomicu na I_2 žicu) za visinu jednakostraničnog trokuta $r = a\sqrt{3}/2$. Polje je dakle:

$$B_{A,D} = \frac{\mu_0 I_1 \sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi a} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi a} = 2 \text{ mT}$$

u smjeru *u papir*. Zbog simetrije, u točki D je isti iznos polja, no smjer je *van papira*.

Točke B i E se nalaze na žici I_2, pa osjećaju polje samo od žice I_1. Iznos tih polja je:

$$B_{B,E} = \frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi a} = 1.15 \text{ mT}$$

Smjer polja u točki B je u papir, u točki E izvan papira.

U točki F se zbraja utjecaj polja žice I_1 i I_2. Točka je jednako udaljena od obje žice (visine 2 jednakostranična trokuta). Budući da žicom I_2 teče jača struja, ukupno polje će biti u smjeru *u papir*. Iznos je:

$$B_{F,C} = \frac{\mu_0 I_2}{\sqrt{3}\pi a} - \frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi a} = \frac{\mu_0 I_1}{\sqrt{3}\pi a}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 0.845 \text{ mT}$$

U točki C je polje suprotnog smjera, dakle *van papira*.

(6 x 1 bod)

Zadnji račun nam sugerira gdje se nalaze točke u kojima je polje nula:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = 0 \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{I_2}{I_1} = \sqrt{3}$$

(1 bod)

Konstruiramo pravac koji prolazi sjecištem dvaju žica (jer je tamo polje sigurno nula), i koji je od žice I_1 udaljen r, a od žice I_2 udaljen $\sqrt{3}r$. Iz danih podataka se na više načina može odrediti kut α. Prikazat ćemo samo jedan način.

Sa slike promatramo trokut RST:

$$\sin 30^\circ = \frac{r_2}{r_1 + y} \Rightarrow y = (2\sqrt{3} - 1) r_1 \,;$$

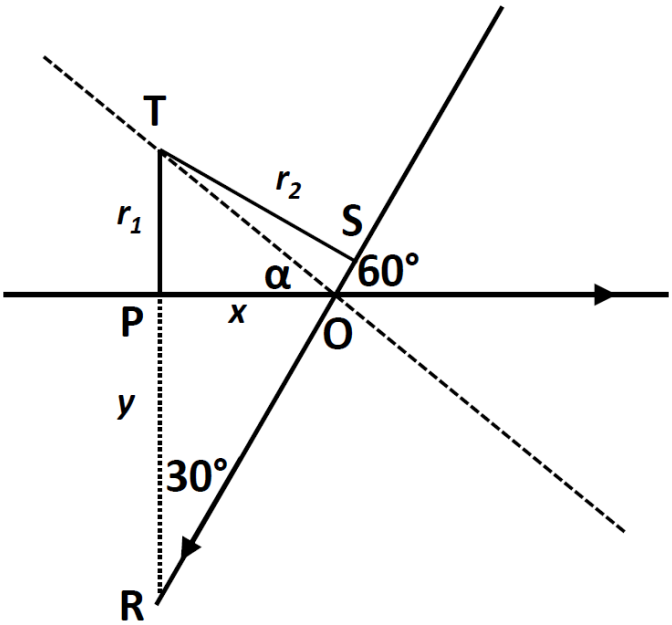
i trokut PRO:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} r_1 \,;$$

Iz trokuta TPO:

$$\tan \alpha = \frac{r_1}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 1}$$

Kut koji se dobije je $\alpha = 35^\circ$.
(3 boda)



Zadatak 5 (10 bodova)

Budući da se šipka nalazi na kosini na nju djeluju gravitacijska sila F_g i sila reakcije podloge N. Šipka se giba prema dolje (zbog gravitacijske sile) pa se u njoj se inducira struja zbog toga što svojim spuštanjem smanjuje tok magnetskog polja unutar strujnog kruga. **(1 bod)**

Inducirani napon je dan s formulom:

$$V_{ind} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{\vec{B}\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \frac{B\Delta S\cos\alpha}{\Delta t} = \frac{BL\Delta x}{\Delta t} = BLv\cos\alpha$$

Budući da površina nije pod pravim kutom na magnetsko polje, imamo dodatni član $\cos\alpha$! **(2 boda)**

Struja koja zbog toga teče u krugu je definirana s otporom šipke (jedini otpor u krugu):

$$I = \frac{V_{ind}}{R} = \frac{BLv}{R}\cos\alpha$$

Ta struja koja teče šipkom stvara Lorentzovu silu $\vec{F}_L = I\vec{l}\times\vec{B}$ okomitu na smjer struje i smjer magnetskog polja. Pravilom desne ruke određujemo smjer sile. **(2 boda)**

Kada se šipka giba konstantnom brzinom ukupna sila na nju je $F = 0$. Zbroj sila duž kosine dakle mora biti:

$$F = mg\sin\alpha - F_L\cos\alpha = 0$$

Iz ove relacije možemo naći brzinu kojom se giba šipka:

$$mg\sin\alpha = ILB\cos\alpha = \frac{B^2L^2v}{R}\cos^2\alpha$$
$$v = \frac{mgR}{B^2L^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 8.32\ \mathrm{m/s}$$

(2 boda)

Šipka se grije jer je omski otpornik kroz kojeg teče struja. Snaga disipirana na šipci je:

$$P = V_{ind}I = \frac{B^2L^2v^2}{R}\cos^2\alpha = 173.23\ \mathrm{W}$$

(2 boda)

Ta snaga zagrijava šipku i u jednoj sekundi temperatura naraste za:

$$Q = mc_p\Delta T = Pt \Rightarrow \Delta T = \frac{Pt}{mc_p} = 0.15\mathrm{K}$$

(1 bod)