Županijsko natjecanje iz fizike

- srednje škole: IV. grupa -

06.03.2018.

1. Teleskopom promatrate svjetlost neke jako daleke zvijezde. Ta svjetlost upada kutom $\alpha = 60°$ u odnosu na os x pa svoj teleskop uvijek usmjeravate pod tim kutom. Međutim, uskoro krećete na put uzduž osi x, prema zvijezdi, brzinom $u = c/4$ tijekom kojeg i dalje želite promatrati istu zvijezdu. Znajući nešto teorije relativnosti, zabrinuti ste zbog efekta kontrakcije duljine koji bi mogao poremetiti vaše bezbrižno promatranje zvijezde. Stoga, prije puta, odlučili ste namjestiti teleskop pod nekim drugim kutom α'.

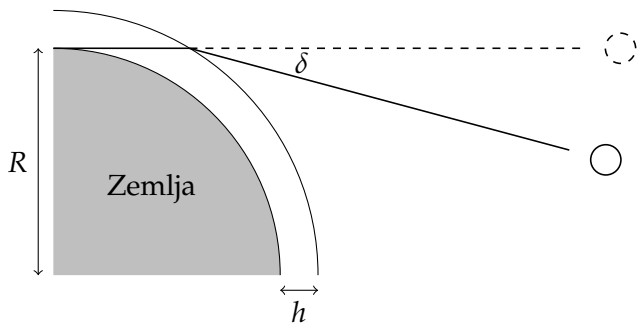
   - Koliki mora bit kut α' da biste eliminirali efekt kontrakcije duljine, odnosno, da bi teleskop u gibanju, za mirujućeg promatrača, opet zatvarao kut α s osi x?

   Nakon što ste namjestili teleskop na kut α' uslijedio je šok—počeli ste se gibati, a ne vidite zvijezdu!

   - Zašto navedeni postupak ne omogućava da vidite zvijedu?
   - Pod kojim kutom α'' ste trebali namjestiti teleskop prije gibanja, pa da možete vidjeti zvijezdu tijekom puta?

[13 bodova]

2. U trenutku zalaska, kad se čini kao da je sunce točno na horizontu, ono se već nalazi ispod horizonta. Uzrok ovog naizglednog paradoksa je činjenica da se sunčeva svjetlost lomi prilikom ulaska u Zemljinu atmosferu, kao što je prikazano na slici. Budući da je naša percepcija položaja sunca temeljena na pravocrtnom širenju svjetlosti, čini nam se da svjetlost dolazi iz smjera koji je otklonjen za kut δ u odnosu na pravi smjer sunca. Izračunajte kut δ uzimajući u obzir da je polumjer Zemlje $R = 6378\,\text{km}$, a visina (optički bitnog dijela) atmosfere $h = 20\,\text{km}$. Indeks loma atmosfere je $n = 1.0003$. Usporedite dobiveni kut s kutnom veličinom sunca $\theta = 15'$. Je li δ puno manji, puno veći ili slične veličine kao θ?



[9 bodova]

3. Snop elektrona upada okomito na kružnu pukotinu promjera $d = 0.013\,\mathrm{nm}$ te se na dalekom zastoru promatra difrakcijska slika. Pod kutom od $10°$ u odnosu na središte ogibne slike uočava se prvi tamna mrlja, tj. tamni prsten. Kojom su brzinom v elektroni prošli kroz pukotinu? Hoće li još na nekim kutovima biti tamnih prstena? Ako da, odredite ih.

[11 BODOVA]

4. S površine Zemlje ispaljen je hitac početnom brzinom $v_0 = c/3$ pod kutom $\alpha = 30°$ u odnosu na horizontalu. Do koje će maksimalne visine h projektil doći? Koje će mu vrijeme τ trebati za to? Zadatak izračunajte iz perspektive promatrača koji miruje na površini Zemlje. Zanemarite otpor zraka i zakrivljenost Zemlje te uzmite da je ubzanje sile teže konstantno i iznosi g.

[10 BODOVA]

5. Sunčevo zračenje upada na solarni panel apsorbancije (koeficijenta apsorpcije) $\alpha \in [0, 1]$ i koristi se za zagrijavanje vode. U normalnim okolnostima, solarni panel održava vodu na temperaturi $T = 70\,°\mathrm{C}$. Međutim, zbog istrošenosti, apsorbancija solarnog panela s vremenom se smanji za 10%. Koja će biti temperatura vode (u stupnjevima Celzija) u novim okolnostima?

[7 BODOVA]

Vrijednosti fizikalnih konstanti:

- brzina svjetlosti: $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$;
- ubrzanje sile teže: $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$;
- masa elektrona: $m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- Planckova konstanta $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$.

VAŽNO: Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule). Za pisanje, koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Županijsko natjecanje iz fizike - rješenja

- srednje škole: IV. grupa -

06.03.2018.

Upute za bodovanje: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadataka. Ako učenici riješe zadatak drugačijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. U ovom ćemo rješenju mirujući (početni) sustav označavati indeksom 1, a gibajući sustav indeksom 2. Pretpostavimo da se štap giba skupa sa sustavom 2 i u njemu zatvara kut θ_2 s osi x. Koliko iznosi pripadni kut θ_1? Ako su l_x i l_y komponente duljine teleskopa, tad vrijedi

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{l_{y2}}{l_{x2}} = \frac{l_{y1}}{\gamma l_{x1}} = \frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\theta_1, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje smo uzeli u obzir da u x-smjeru dolazi do kontrakcije duljine. Ovdje je

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{4}{\sqrt{15}} \qquad \text{[1 BOD]}$$

Lorentzov faktor. U našem je slučaju $\theta_1 = \alpha$ i $\theta_2 = \alpha'$, odakle je

$$\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\operatorname{tg}\alpha\right) \qquad \text{[1 BOD]}$$

$$= 59.2^\circ. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Dakle, ako je teleskop prije početka gibanja bio postavljen pod kutom α', kontrakcija duljina će dovesti do toga da će opažač koji je ostao mirovati vidjeti da je teleskop opet pod kutom α, međutim, u teoriji relativnosti, bitno je ono što vidi opažač koji se giba skupa s teleskopom. Ključno je za primjetiti da za opažača koji se počeo gibati zrake svjetlosti više ne upadaju pod istim kutom i to je razlog zašto njegov teleskop ne vidi zvijezdu. [3 BODA]

Neka je ϕ kut pod kojim upada svjetlost. Tada vrijedi

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{v_y}{v_x}, \qquad \text{[1 BOD]}$$

te je Lorentzova transformacija kuta ϕ povezana s Lorentzovom transformacijom brzina. Imamo

$$\operatorname{tg}\phi_2 = \frac{v_{y2}}{v_{x2}} = \frac{\frac{v_{y1}/\gamma}{1+uv_{x1}/c^2}}{\frac{v_{x1}+u}{1+uv_{x1}/c^2}} = \frac{1}{\gamma}\frac{v_{y1}}{v_{x1}+u} = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\phi_1}{\cos\phi_1 + u/c}. \qquad \text{[3 BODA]}$$

Uvrštavanje $\phi_1 = \alpha$, $\phi_2 = \alpha''$ daje

$$\alpha'' = 48.2^\circ. \qquad \text{[1 BOD]}$$

2. Prilikom ulaska u atmosferu, sunčeva svjetlost se lomi zbog razlike u indeksu loma. Ako je θ_u upadni kut, a θ_i izlazni kut svjetlosti, vrijedi

$$\sin\theta_\mathrm{u} = n\sin\theta_\mathrm{i}. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Iz geometrije vidimo da vrijedi

$$\theta_\mathrm{i} = \arcsin\frac{R}{R+h}, \qquad \text{[2 BODA]}$$

kao i

$$\theta_\mathrm{u} = \theta_\mathrm{i} + \delta. \qquad \text{[2 BODA]}$$

Odavde je

$$\begin{aligned}\delta &= \arcsin\frac{nR}{R+h} - \arcsin\frac{R}{R+h} && \text{[1 BOD]}\\ &= 0.222^\circ = 13.34' && \text{[1 BOD]}\end{aligned}$$

Vidimo također da je kut δ približno jednak kutnoj veličini sunca θ, što znači da promatrani efekt nije zanemariv, već je prividna slika sunca za jednu širinu iznad pravog položaja sunca.

[1 BOD]

3. Elektroni se zbog svoje valne prirode ogibaju na pukotini. Uvjet za minimum difrakcije je dan formulom

$$d \sin\theta = m\lambda, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je λ valna duljina elektrona, a m red difrakcije. Prema de Broglieju, valna duljina elektrona je povezana s njihovom količinom gibanja p preko

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad \text{[2 BODA]}$$

gdje je h Planckova konstanta. Budući da se prvi red difrakcije događa pri kutu $\theta = 10°$, količina gibanja elektrona je

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{d \sin 10°}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Ako bi se brzina elektrona računala po formuli $v = p/m$, dobile bi se vrijednosti veće od brzine svjetlosti, što znači da je potrebno koristiti formulu za relativističku količinu gibanja $p = \gamma m v$, odakle je brzina elektrona

$$v = \frac{p/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} \qquad \text{[2 BODA]}$$

$$= 2.20 \times 10^8\,\mathrm{m/s}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Osim prvog minimuma, ostali minimumi se javljaju pri kutovima

$$\theta_m = \arcsin(m \sin 10°). \qquad \text{[1 BOD]}$$

Eksplicitno,

$$\theta_2 = 20.32°, \quad \theta_3 = 31.40°, \quad \theta_4 = 44°, \quad \theta_5 = 60.25°. \qquad \text{[2 BODA]}$$

4. Budući da sila teža djeluje samo u vertikalnom smjeru, iz drugog Newtonovog zakona $\Delta\vec{p}/\Delta t = \vec{F}$ odmah imamo vremensku ovisnost količine gibanja. Za horizontalni smjer,

$$p_x = \gamma m v_x = \gamma_0 m \frac{c}{3} \cos 30^\circ \quad \rightsquigarrow \quad \gamma v_x = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} c, \qquad \text{[1 BOD]}$$

gdje je $\gamma_0 = 3/2\sqrt{2}$ Lorentzov faktor u početnom trenu, a $\gamma = (1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2)^{-1/2}$ Lorentzov faktor u proizvoljnom trenu. Za vertikalni smjer imamo analogno

$$p_y = \gamma m v_y = \gamma_0 m \frac{c}{3} \sin 30^\circ - mgt \quad \rightsquigarrow \quad \gamma v_y = \frac{1}{4\sqrt{2}} c - gt. \qquad \text{[2 BODA]}$$

U najvišoj točki putanje, vertikalna brzina iščezava, $v_y = 0$, odakle slijedi

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{c}{g} && \text{[1 BOD]} \\ &= 5.40 \times 10^6\,\mathrm{s} \approx 2 \text{ mjeseca.} && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

Da bismo izračunali do koje će maksimalne visine doći hitac, koristimo rad-energija teorem, po kojem je rad kojeg je obavila sila teža jednak razlici kinetičkih energija hica

$$W = mgh = (\gamma_0 - 1)mc^2 - (\gamma - 1)mc^2 = (\gamma_0 - \gamma)mc^2. \qquad \text{[2 BODA]}$$

U najvišoj točki putanje, $v_y = 0$, tako da je, u tom trenu, $\gamma = (1 - (v_x/c)^2)^{-1/2}$, pa iz prve jednadžbe imamo

$$v_x = \sqrt{\frac{3}{35}} c \quad \rightsquigarrow \quad \gamma = \frac{\sqrt{35}}{4\sqrt{2}}. \qquad \text{[1 BOD]}$$

Odavde je maksmalna visina

$$\begin{aligned} h &= \frac{6 - \sqrt{35}}{4\sqrt{2}} \frac{c^2}{g} && \text{[1 BOD]} \\ &= 1.36 \times 10^{14}\,\mathrm{m}, && \text{[1 BOD]} \end{aligned}$$

što odgovara udaljenosti daleko izvan Sunčevog sustava.

5. Ako sunčeva svjetlost intenziteta I upada na solarni panel apsorbancije α, tada je apsorbirani intenzitet I_{abs} jednak

$$I_{\text{abs}} = \alpha I \qquad [1 \text{ BOD}]$$

i on se u potpunosti iskoristi za zagrijavanje vode. Ako vodu smatramo crnim tijelom u ravnoteži na (termodinamičkoj) temperaturi T, tada će vrijediti

$$I_{\text{abs}} = \alpha I = \sigma T^4, \qquad [2 \text{ BODA}]$$

gdje je σ Stefan-Boltzmannova konstanta. Ukoliko se apsorbancija solarnog panela promijeni na vrijednost α', nova će temperatura vode biti

$$\alpha' I = \sigma T'^4 \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Odavde slijedi

$$T' = \left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{1/4} T \qquad [1 \text{ BOD}]$$

Uvrštavanjem $\alpha'/\alpha = 0.9$ i pretvaranjem u stupnjeve Celzija, dobivamo

$$T' = 61\,^{\circ}\text{C}. \qquad [2 \text{ BODA}]$$