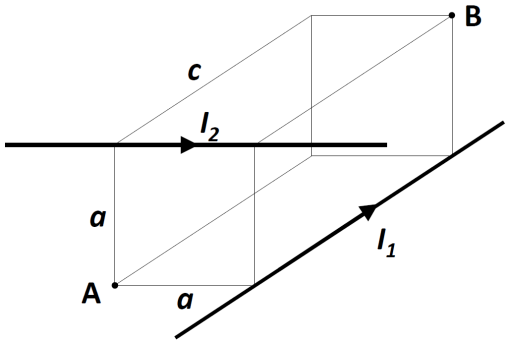
Zadaci za općinsko natjecanje 2019. – 3. skupina

Zadatak 1 (10 bodova)

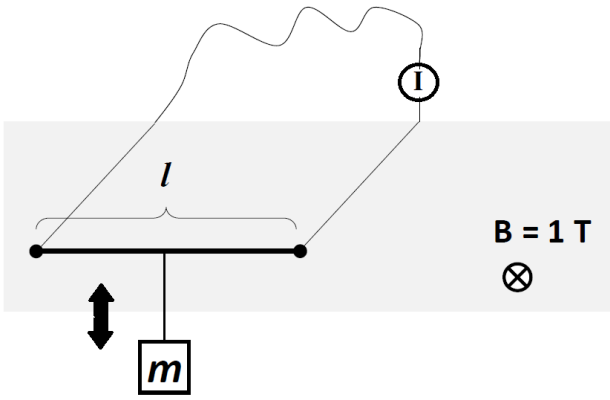
Dvije žice idu duž bridova zamišljenog kvadra $a \times a \times c$ kao na slici. Duljine bridova su $a = 30$ cm te $c = 60$ cm.



a) Izrazi iznos ukupnog magnetskog polja u točkama A i B u ovisnosti o strujama I_1 i I_2.
b) Koliki trebaju biti iznosi struja I_1 i I_2 tako da polje u točki A bude $B_A = 7.45\ \mu$T a polje u točki B $B_B = 4.70\ \mu$T.

Zadatak 2 (10 bodova)

Na slici je prikazana verzija Ampereove vage. Čelični vodič duljine $l = 0.6$ m i presjeka $A = 10$ mm^2 se nalazi položen u magnetskom polju $B = 1$ T, a na njega je obješen uteg mase m. Vodič se može gibati samo gore-dolje. Prolazi li određena vrijednost struje iz strujnog izvora I kroz vodič, uteg će mirovati (neće se spuštati ni dizati). Odredi smjer struje i koliki mora biti uteg da bi kroz vodič morala teći struja $I = 1$ A. Nađi napon V potreban da bi ta struja tekla vodičem ako je otpornost čelika $\rho = 7 \cdot 10^{-7}\ \Omega$m.



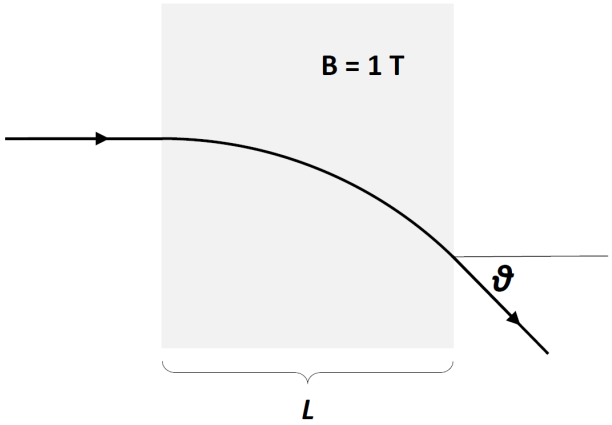
Zadatak 3 (8 bodova)

Astronaut ima uteg m, oprugu konstante $k = 100$ N/m i bezmasenu nerastezljivu nit duljine l. Od toga može napraviti njihalo i oscilator s oprugom. Oba oscilatora na Zemljinoj površini imaju period $T_Z = 1$ s. Koliki je njihov period na Marsu, gdje je gravitacijsko ubrzanje $g = 3.69$ m/s^2. Nađi masu m i duljinu niti l!

Zadatak 4 (12 bodova)

Veliki hadronski supersudarač je sinkrotronski prsten u kojem se ubrzavaju atomske jezgre do brzina približno jednakih brzini svjetlosti. Unatoč popularnom mišljenju, prsten nije kružnog oblika već se sastoji od pravocrtnih dijelova unutar kojih se jezgre ubrzavaju i zakrivljenih djelova gdje zakreću zbog djelovanja snažnog magnetskog polja. Zakretni magnet u Velikom hadronskom supersudaraču je jačine $B = 1$ T i stvara magnetsko polje okomito na smjer gibanja nabijene jezgre, koja se giba brzinom $v \lesssim c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Za potrebe zadatka možemo aproksimirati $v = c$.

a) Nađi smjer magnetskog polja koje zakreće jezgru olova $^{208}_{82}$Pb (vidi sliku). Napomena: jezgra je potpuno ogoljena od elektrona!
b) Nađi duljinu magneta L potrebnu da se jezgra zakrene za kut ϑ. Pritom vrijedi $0 < \vartheta < 90°$.
c) Kolika je duljina magneta da bi se jezgra zakrenula za $45°$.



Masa jezgre atoma olova $^{208}_{82}$Pb je $M = 207.98$ g/mol.

Zadatak 5 (10 bodova)

Dva utega jednake mase $m = 1$ kg su postavljeni na glatkom stolu bez trenja i povezani nerastegnutom oprugom konstante $k = 100$ N/m i neke duljine l_0. Pomaknemo utege tako da je sada udaljenost među njima $l = l_0 + x_0$ i potom ih pustimo da se slobodno gibaju tako da centar mase miruje. U trenutku kada je opruga ponovno nerastegnuta brzina oba utega je $v = 1$ m/s (s tim da se gibaju u suprotnim smjerovima). Nađi početnu vrijednost rastegnutosti opruge x_0 i skiciraj rastegnutost utega u ovisnosti o vremenu $x(t)$. Izračunaj period titranja utega.

Uputa: rastegnutost $x(t)$ je definirana kao razlika udaljenosti dvaju utega od nerastegnute duljine opruge $x(t) = l - l_0$.

Konstante korištene u zadatku:

$u = 1.6605 \cdot 10^{-27}$;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m / A;
$g = 9.81$ m/s^2.
$e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C

VAŽNO:
Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Zadaci za općinsko natjecanje 2019. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Magnetsko polje u točki od žice kroz koju teče struja je definirano s formulom $B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$, gdje je I struja a r najmanja udaljenost žice od točke.

a) I_1 i I_2 u točkama A i B stvaraju međusobno okomita polja, pa je ukupno polje suma njihovih kvadrata. **(2 boda)**

$$B_A = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right)^2}$$

$$B_B = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi c}\right)^2}$$

(2+2 boda)

b) Kvadriramo dvije jednadžbe i oduzmemo B_A^2 od B_B^2. Dobijemo izraz za I_2:

$$I_2^2 = \frac{4\pi^2(B_A^2 - B_B^2)}{\mu_0^2(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2})}$$

(2 boda)

Konačan rezultat je $I_2 = 10$ A, $I_1 = 4.98$ A. **(2 boda)**

Zadatak 2 (10 bodova)

Na žicu kojom teče struja u magnetskom polju djeluje sila $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$, gdje je $\vec{l}$ duljina žice sa smjerom toka struje. Da bi žica mirovala sila težine utega mora biti po iznosu jednaka sili F, a njen smjer mora biti suprotan. Pravilom desne ruke određujemo, budući da smjer sile $\vec{F}$ mora biti prema gore, da je smjer struje u žici prema "desno." **(2 boda)**

Iznos mase utega mora biti

$$mg = IlB \Rightarrow m = \frac{IlB}{g} = 61\text{g}$$

(3 boda)

Da bi našli vrijednost napona moramo izračunati otpor iz $R = \rho\, l/A = 42$ mΩ. **(2 boda)**
Napon je stoga $V = IR = 42$ mV. **(3 boda)**

Zadatak 3 (8 bodova)

Periodi njihala i oscilatora s oprugom su:

$$T_{\text{njih.}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad ; \quad T_{\text{opr.}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Primjećujemo da period opruge ne ovisi o gravitaciji, pa će biti jednak na Marsu i na Zemlji. **(2 boda)**

Iz perioda $T_Z = 1$ s možemo naći masu $m = 2.53$ kg. **(2 boda)**

Duljina njihala na Zemlji se može naći iz perioda $T_Z = 1$ s. Duljina njihala je stoga $l = 24.8$ cm. **(2 boda)**

Period njihala na Marsu je $T_M = 1.63$ s. **(2 boda)**

Zadatak 4 (12 bodova)

Jezgra je pozitivno nabijena čestica naboja $q = +82e$. **(2 boda)**

Sila koja ju zakreće je Lorentzova sila $\vec{F}_L = q\vec{v} \times B$. Po pravilu desne ruke smjer magnetskog polja je "iz papira." **(2 boda)**

Da bismo našli potrebnu duljinu magneta skicirajmo radijus kružnice po kojoj se jezgra giba unutar magnetskog polja. Primjetimo da zakrivljena putanja čini kružni isječak kojem je kut točno traženi kut zakretanja ϑ. Korištenjem trigonometrijskih relacija:

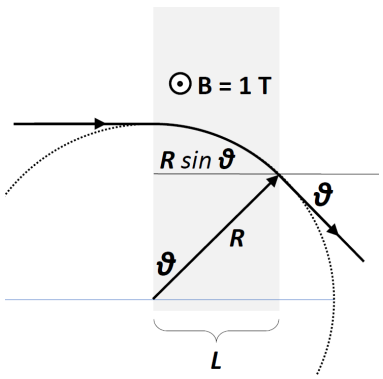
$$L = R\sin\vartheta$$

(3 boda)

Radijus zakrivljenosti R nađemo izražavajući Lorentzovu silu kao centripetalnu:

$$m\frac{v^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \frac{208uc}{82eB}$$

(2 boda)



Da bi zakrenuli jezgru za $\vartheta = 45°$, trebamo

$$L = \frac{208uc}{82\sqrt{2}eB} = 5.58\text{m}$$

(3 boda)

Zadatak 5 (10 bodova)

Promatramo li sustav kao dva odvojena sustava, utega i dijela opruge do centra mase, imamo gibanje jednog tijela (utega) i rastezanje polovice opruge (slika). Jedina razlika sada je što smo oprugu "prepolovili" te smo joj time promijenili konstantu k. Oprugu možemo zamisliti kao dvije opruge spojene u seriju – njihove konstante se tada recipročno zbrajaju:

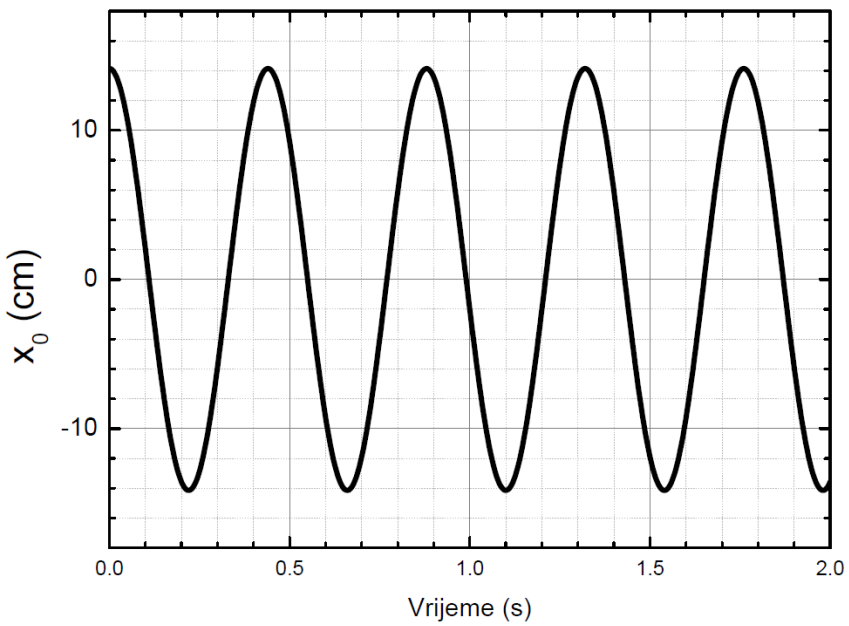
$$\frac{1}{k_{uk}} = \frac{1}{k_{1/2}} + \frac{1}{k_{1/2}}$$

Iz toga proizlazi da je konstanta polovice opruge $k_{1/2} = 2k_{uk}$. (bodovi se dodaju i za drugačiji pristup) **(3 boda)**

Sada možemo izračunati da je period titranja $T = 2\pi\frac{m}{2k} = 0.44$ s. **(2 boda)**

Kada je opruga nerastegnuta utezi imaju brzinu $v = 1$ m/s, što je ujedno i njihova maksimalna brzina (brzina je najveća kad je opruga nerastegnuta jer je tada sva elastična energija pretvorena u kinetičku). Izjednačavanjem energija možemo dobiti maksimalni pomak x_0:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2m}{k}}v = 14.14 \text{ cm}$$

(2 boda)

Za skicu bodovi se daju za dobro ucrtan/naznačen period, za dobru funkciju (kosinus!) i za dobro ucrtanu/naznačenu amplitudu. **(3 boda)**