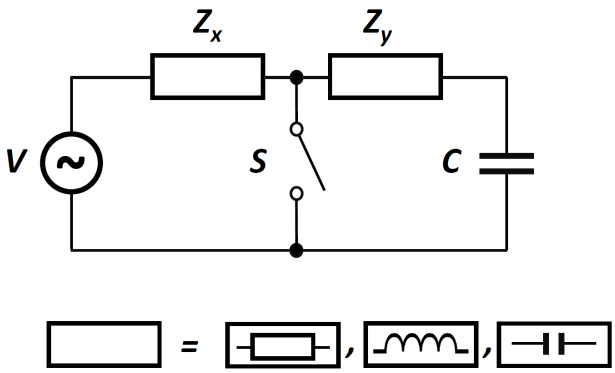
Zadaci za županijsko natjecanje 2019. – 3. skupina

Zadatak 1 (10 bodova)

Strujni krug je prikazan kao na slici i sastoji se od izvora izmjeničnog napona V, kondenzatora C, nepoznatih elemenata Z_x i Z_y te sklopke koja se po potrebi može zatvoriti. Nepoznati element može biti otpornik, zavojnica ili kondenzator. Frekvencija izvora je $f = 50$ Hz, kondenzator $C = 22$ mF. Kada je sklopka otvorena (kroz nju ne teče struja) struja na frekvenciji izvora je u fazi sa naponom, a impedancija kruga je $Z = 50\ \Omega$. Kada je sklopka zatvorena, struja je pomaknuta za $90°$ u odnosu na napon (rani ili kasni). Nađi elemente Z_x i Z_y te njihove vrijednosti.



Zadatak 2 (10 bodova)

Kuglica mase $m = 10$ g je vezana za oprugu konstante k u horizontalnoj ravnini. Položaj kuglice u vremenu možemo opisati s:

$$x(t) = -20\ \text{mm} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{0.2\ \text{s}} \cdot t\right)$$

(a) Nađi konstantu opruge k.

(b) Nađi srednju brzinu kuglice v od trenutka $t = 0$ do trenutka kada prijeđe pola amplitude.

(c) Nađi srednju brzinu kuglice v od trenutka kada je prešla pola amplitude do ravnotežnog položaja.

Zadatak 3 (12 bodova)

Unutar pločastog kondenzatora, na sredini, nalazi se ploča paralelna s vanjskim pločama, čija je debljina $w = 0.6\ d$, gdje je d udaljenost među vanjskim pločama. Bez unutarnje ploče, kapacitet kondenzatora je $C = 20$ nF. Kondenzator prvo spojimo na istosmjerni izvor napona $V = 200$ V. Nakon što struja prestane teči odspojimo kondenzator. Potom polagano izvučemo unutarnju ploču izvan kondenzatora. Koliki smo rad obavili izvlačenjem ploče ako je ploča:

(a) metalna;

(b) staklena ($\varepsilon = 4$).

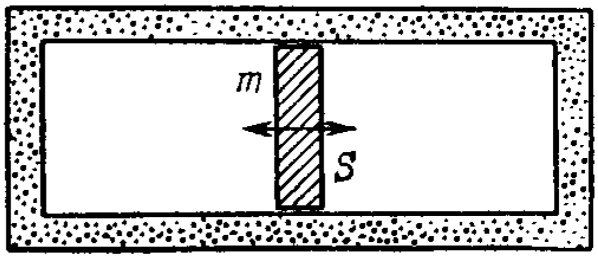
Zadatak 4 (8 bodova)

Magnetizirana čelična kuglica mase m se pusti s visine H da pada i potom udari o nemetalnu tvrdu podlogu. Sudar s podlogom je potpuno elastičan. Nađi period T gibanja kuglice. Je li riječ o harmoničkom gibanju? Sada modificiramo eksperiment i kuglica prije pada prolazi kroz zavojnicu na koju je spojen voltmetar. U kojem slučaju će kuglica prolaskom kroz zavojnicu izgubiti više energije: ako je zavojnica spojena na voltmetar, kratko spojena ili spojena na otpornik od $100\ \Omega$?

Zadatak 5 (10 bodova)

U cilindru s klipom mase m, poprečnog presjeka S, nalazi se idealni plin s obje strane klipa. Tlak plina je p_0. Klip dijeli cilindar na dva jednaka dijela, svaki volumena V_0. Klip malo pomaknemo u jednu stranu ($x \ll V_0/S$) i potom pustimo. Nađi frekvenciju f oscilacija klipa izraženu pomoću zadanih veličina p_0, V_0, m i S. Pretpostavi da su svi procesi izotermni te zanemari efekte trenja. U zadatku iskoristi sljedeću aproksimaciju:

$$\frac{1}{1 \pm u} \approx 1 \mp u\,; \quad \text{za } u \ll 1$$



Konstante korištene u zadacima:

$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$g = 9.81$ m/s^2.

VAŽNO:
Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Zadaci za županijsko natjecanje 2019. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Kada je sklopka zatvorena struja teče cijelim strujnim krugom i u fazi je s naponom što znači da impedancija sadrži samo otpor 50 Ω: **(2 boda)**

$$Z_1 = 50\Omega = Z_x + Z_y - i\frac{1}{\omega C}$$

Kada je sklopka otvorena struja teče samo kroz Z_x i pomaknuta je za $90°$ u odnosu na napon, što znači da se impedancija sastoji samo od reaktancije pa možemo pisati $Z_x = iX_x$. Zaključujemo kako je element Z_x ili zavojnica ili kondenzator. Kako u prvoj jednadžbi postoji realna impedancija, drugi element, Z_y mora biti realan, tj. **(3 boda)**

$$Z_y = R$$

Sada je prva jednadžba:

$$50\Omega + 0 \cdot i = R + i\left(X_x - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Izjednačimo realni i imaginarni dio lijevo i desno: **(2 boda)**

$$R = 50\Omega$$

$$X_x - \frac{1}{\omega C} = 0$$

Vidimo da je reaktancija X_x pozitivna, što znači da se radi o zavojnici: **(2 boda)**

$$Z_x = i\omega L$$

Induktivitet zavojnice je tada: **(1 bod)**

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = 0.46\text{mH}$$

Zadatak 2 (10 bodova)

(a) Iz jednadžbe gibanja $x(t)$ očitamo period gibanja $T = 0.2$ s. Povežemo li period s jednažbom za harmonički oscilator:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

izračunamo da je $k = 9.86$ N/m. **(2 boda)**

(b,c) Srednju brzinu kuglice računamo kao omjer prijeđenog puta i vremena koje nam treba za taj put, $v = s/t$.

Za slučaj (b) tražimo vrijeme kada je kuglica u položaju $x(t_b) = -A/2$, gdje je $A = 20$ mm amplituda gibanja a $T = 0.2$ s period gibanja:

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t_b\right)$$

Funkcija $\cos\vartheta$ je na pola svoje vrijednosti za $\vartheta = \pi/3$ **(2 boda)**

Pišemo:

$$\frac{2\pi}{T} \cdot t_b = \frac{\pi}{3}$$
$$t_b = \frac{T}{6}$$

Srednja brzina je:

$$v_b = \frac{A/2}{T/6} = 3\frac{A}{T}$$

Srednja brzina je stoga $v_b = 0.3$ m/s. **(3 boda)**

Za slučaj (c) tražimo razliku vremena kada je kuglica u položaju $x(t_b) = -A/2$ i $x(t_0) = 0$. Poznato nam je da je kuglici do ravnotežnog položaja trebalo četvrt perioda, tj. $t_0 = T/4$, a vrijeme do pola amplitude smo izračunali iz (b), pa je razlika vremena

$$t_b = t_0 - t_c = \frac{T}{4} - \frac{T}{6} = \frac{T}{12}$$

Srednja brzina je stoga $v_c = 6A/T = 0.6$ m/s. **(3 boda)**

Zadatak 3 (12 bodova)

Kapacitet kondenzatora bez ploče je dan s **(1 bod)**

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

U slučaju da se unutar kondenzatora nalazi metalna ploča debljine $w = 0.6d$, možemo kondenzator zamisliti kao paralelni spoj dva kondenzatora, svaki debljine $0.2\ d$. **(3 boda)** Tada vrijedi:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{0.2\ d} = \frac{C}{0.2}$$

pa je ukupni kapacitet:

$$\frac{1}{C_m} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_m = \frac{C}{0.4}$$

Ako kondenzator prvo dovedemo na napon $V = 200$ V, a potom ga odspojimo, naboj Q doveden na njega ostaje konstantan jer nema gdje otići. **(2 boda)**

U slučaju metalne ploče, taj naboj je

$$Q_m = C_m V$$

Izvlačenjem unutarnje ploče kapacitet se mijenja sa C_m na C, a s njim i napon (jer je naboj konstantan). Konačni napon nakon izvlačenja ploče je

$$V_{mk} = \frac{Q_m}{C} = \frac{C_m}{C} V$$

Obavljeni rad je promjena energije kondenzatora, koja je dana s

$$E = \frac{1}{2}QV \Rightarrow W_m = \Delta E = \frac{1}{2}Q_m(V_{mk} - V)$$

Obavljeni rad je dakle: **(2 boda)**

$$W_m = \frac{1}{2}C_m(\frac{C_m}{C} - 1)V^2 = 1.5 \text{ mJ}$$

Za staklenu ploču kondenzator možemo razložiti na tri paralelna kondenzatora: dva debljine $0.2\ d$ i jedan sa staklenim dielektrikom debljine $0.6\ d$: **(2 boda)**

$$C_2 = \varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{0.6d} = \frac{\varepsilon}{0.6}C$$

Sada je ukupni kapacitet:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_s = \frac{C}{0.55}$$

U posljednjem koraku smo iskoristili $\varepsilon = 4$. Daljnji postupak je identičan, uz novi naboj Q_s i novi konačni napon V_{sk}. Obavljeni rad je: **(2 boda)**

$$W_s = \frac{1}{2}C_s\left(\frac{C_s}{C} - 1\right)V^2 = 0.595 \text{ mJ}$$

Zadatak 4 (8 bodova)

Kuglica pada s visine H. Vrijeme pada računamo iz slobodnog pada: **(1 bod)**

$$H = \frac{1}{2}gt_{pad}^2 \Rightarrow t_{pad} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Brzina u trenutku udara u podlogu je $v_0 = gt_{pad} = \sqrt{2Hg}$. Nakon elastičnog odbijanja brzina je po iznosu nepromijenjena ali suprotnog smjera. Vrijeme koje će trebati kuglici da prestane rasti je: **(1 bod)**

$$0 = v_0 - gt_{up} \Rightarrow t_{up} = v_0/g = t_{pad}$$

Naravno, vrijeme uspona jednako je vremenu pada kuglice jer energija nije izgubljena pri sudaru s tlom. Ukupni period takvog gibanja je **(1 bod)**

$$T = 2t_{pad} = 2\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Vertikalni pomak je sada $y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$ pri padu ili $y(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ pri usponu. Obje jednadžbe opisuju parabolu, što očito nije pomak harmoničkog oscilatora, koji ima sinusoidalni oblik. Ne radi se o harmoničkom gibanju, iako je gibanje periodičko. **(2 boda)**

Kuglica padom kroz zavojnicu, budući da je magnetska, mijenja magnetski tok unutar zavojnice, što inducira napon na krajevima zavojnice. Ako zbog tog napona poteče struja, ta struja stvara magnetsko polje koje se protivi promjeni magnetskog polja kuglice (Lenzovo pravilo), efektivno ga usporavajući. **(2 boda)**

Što je struja jača, to će kuglica više usporiti. Struja će biti to jača što je otpor slabiji. Poznato je da voltmetar ima jako veliki otpor ($R > 10$ MΩ), a kratki spoj ima jako mali otpor $R \approx 0$. Zato će kuglica najmanje usporiti ako je na zavojnicu spojen voltmetar a najviše ako je zavojnica kratko spojena.

Prema tome, kuglica će najviše energije izgubiti u slučaju kada je zavojnica kratko spojena. **(1 bod)**

Zadatak 5 (10 bodova)

Kada je klip u sredini duljina cilindra lijevo i desno je jednaka i iznosi l tako da je volumen u oba dijela

$$V_0 = Sl \ .$$

Bez narušenja općenitosti pretpostavimo da smo klip pomaknuli u lijevo. Tada su volumeni lijeve i desne strane **(1 bod)**

$$V_L = S(l - x) = V_0 - Sx \ ; V_D = S(l + x) = V_0 + Sx$$

To je uzorkovalu promjenu tlaka izotermnom promjenom ($pV = const$):

$$p_L V_L = p_0 V_0 \Rightarrow p_L = \frac{V_0}{V_0 - Sx}\, p_0$$

Istodobno, vrijedi **(1 bod)**

$$p_D = \frac{V_0}{V_0 + Sx} p_0$$

Koristimo li pokratu $u = Sx/V_0$ vidimo da je $u \ll 1$, jer je $x \ll S/V_0$, i sada izrazi za tlak postaju, iskoristimo li aproksimaciju: **(3 boda)**

$$p_{L,D} = \frac{1}{1 \mp u}\, p_0 \approx (1 \pm u) p_0$$

Sila koja se javlja na klip jer se pomaknuo u smjeru "$-x$" djeluje tako da ga vraća i iznosi: **(2 boda)**

$$F = S\Delta p = S(p_L - p_D) = 2S\, u\, p_0 = 2\, \frac{S^2\, p_0}{V_0} x$$

Budući da sila $F = ma$ djeluje suprotno od pomaka, a proporcionalna je s pomakom, zaključujemo da se radi o harmoničkom oscilatoru frekvencije titranja **(3 boda)**

$$f = 2\pi \sqrt{\frac{2\, p_0}{m\, V_0}}\, S$$