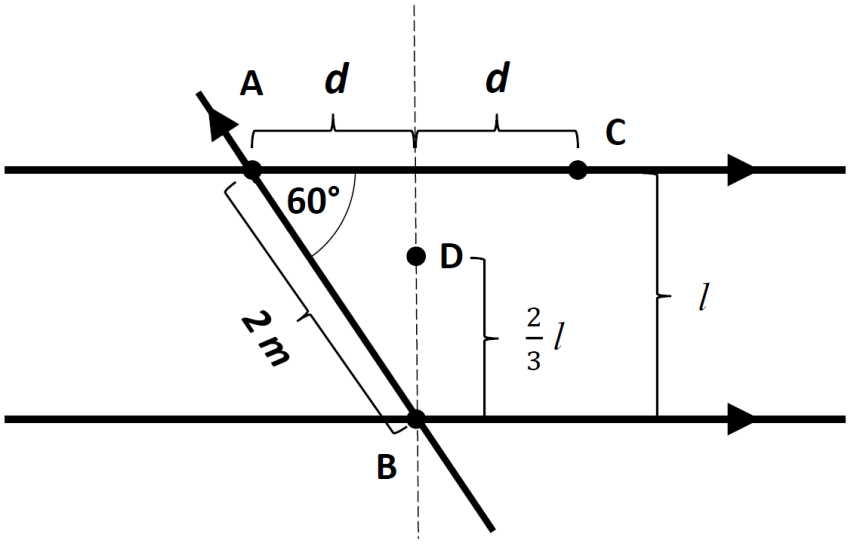
Zadaci za općinsko natjecanje 2020. – 3. skupina

Zadatak 1 (10 bodova)

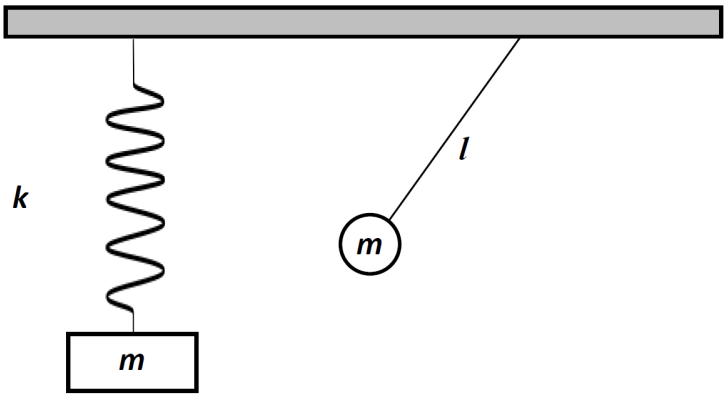
Kroz svaku od tri žice postavljene kao na slici prolazi struja $I = 15$ A u smjeru označenom strelicom. Pronađi iznos (broj) i smjer (u ili izvan papira) magnetskog polja u točkama A, B, C i D. Kao što je označeno na slici, udaljenost među dvije paralelne žice je l, a točka D se nalazi na dvije trećine puta od točke B do gornje žice.



Napomena: Magnetsko polje ravne žice uzduž osi te žice iščezava.

Zadatak 2 (10 bodova)

Njihalo mase m i duljine niti l te opruga konstante opruge k s utegom mase m vise sa stropa kao na slici. Masa utega na opruzi i njihala je jednaka. U položaju na slici oba utega miruju tako da je opruga rastegnuta a njihalo pomaknuto iz ravnoteže. Potom se uteg na opruzi i njihalo počinju kretati istodobno. Ako nakon $t = 0.5$ s opruga napravi tri puna perioda a njihalo tek dođe u ravnotežni položaj, nađi omjer mase i konstante opruge m/k te duljinu njihala l.



Zadatak 3 (10 bodova)

Zavojnica koja se sastoji od 100 namotaja žice u obliku kvadrata smještena je u magnetskom polju tako da okomica na ravninu zavojnice zatvara kut od 60° sa smjerom polja. Kada se magnetsko polje jednoliko povećava sa 100 μT do 600 mT u vremenu od 0.5 s, elektromotorna sila iznosa 60 mV se inducira u zavojnici. Kolika je ukupna duljina žice?

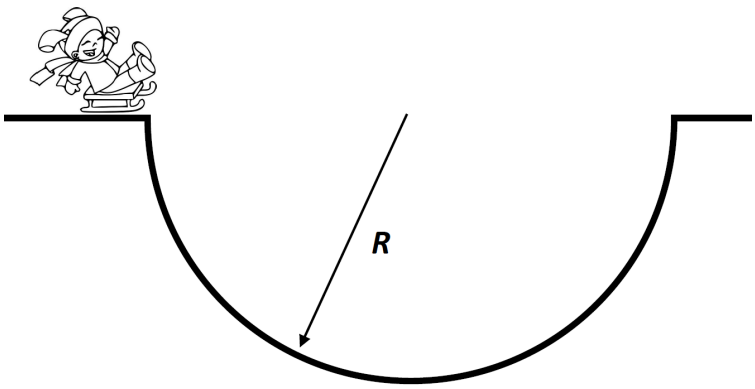
Zadatak 4 (10 bodova)

Elektron se nalazi u magnetskom polju u smjeru osi $\hat{z}$ jačine $B_z = 10$ μT. Njegova brzina u trenutku $t = 0$ je $v_x = 100$ m/s, $v_y = 0$ m/s, $v_z = 50$ m/s. Nađi komponente akceleracije (a_x, a_y, a_z) elektrona zbog utjecaja magnetskog polja na elektron u trenutku $t = 0$. Nađi vrijeme potrebno da elektron ponovno ima $v_y = 0$. Koliko tada iznosi v_x i koliko je prešao duž $\hat{z}$-osi s_z?

Zadatak 5 (10 bodova)

Saonice sa Monikom se kližu po zaleđenoj udubini bez trenja. Zakrivljenost udubine se može opisati kao polukugla radijusa $R = 40$ m kao na slici (nije u mjerilu). Ako Monika sjedne na saonice i samo se pusti s ruba udubine, pronađi:

1. Kada će Monika imati najveću brzinu?
2. Kolika je ta brzina?
3. U nekom trenu Monika se umori i zaustavi na dnu udubine. Malo se udalji od samog dna i pusti da klizi slobodno. Koliki je period njenog klizanja tada?



Napomena: u svim zadacima gravitacijsko ubrzanje Zemlje je $g = 9.81$ m/s^2.

VAŽNO:

Tijekom ispita ne smijete imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.

Zadaci za općinsko natjecanje 2020. – 3. skupina
Rješenja

Zadatak 1 (10 bodova)

Magnetsko polje u točki od žice kroz koju teče struja je definirano formulom

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \ ,$$

gdje je I struja a r najmanja udaljenost žice od točke. Magnetsko polje na samoj žici ne dolazi od te žice.

Kako bismo izračunali iznos magnetskog polja moramo odrediti veličine d i l. Primjetimo da točke ABC tvore jednakostranični trokut stranice $a = 1$ m. To znamo jer su svi kutevi unutar trokuta $60°$. **(2 boda)**

Zato možemo pisati:

$$2d = 2 \text{ m} \Rightarrow d = 1 \text{ m}$$

Primjetimo da je visina jednakostraničnog trokuta dana s:

$$l = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ m}$$

A) Jedini doprinos točki A je donja žica (koja prolazi točkom B) udaljena za l. Magnetsko polje je $B_A = 1.73\ \mu$T u smjeru iz papira. **(1 bod)**

B) Iznos polja u točki B je jednak kao i u točki A, jer je jedina žica koja stvara magnetsko polje u toj točki žica koja prolazi točkama AC, udaljena za l. Iznos polja je u papir. **(1 bod)**

C) Točka C kao vrh zamišljenog jednakostraničkog trokuta ABC je udaljena od žice AB upravo za visinu trokuta, l. Budući da je smjer struje u žicama AB i B takav da su magnetska polja od tih žica međusobno suprotna, a da su obje žice jednako udaljene od točke C, polje u toj točki iščezava! $B_C = 0$ **(2 boda)**

D) Točka D se nalazi u središtu svih visina trokuta, jer dijeli visinu u omjeru 2:1. Zato je udaljenost točke D od žice AC i od žice AB jednak i iznosi $r = \frac{1}{3}l$. Obje žice stvaraju magnetsko polje u istom smjeru – u papir. Treća žica B stvara magnetsko polje u smjeru iz papira. Magnetsko polje je:

$$B_D = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{1}{3}\sqrt{3}} + \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{1}{3}\sqrt{3}} - \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

$B_D = \frac{\mu_0 I\ 9}{4\pi\sqrt{3}} = 7.79\ \mu$T u papir. **(4 boda)**

Zadatak 2 (10 bodova)

Period njihala dan je s **(2 boda)**

$$T_{Nj} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Period mase na opruzi je **(2 boda)**

$$T_O = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Podatak koji znamo je da nakon tri puna perioda opruge ($3T_O$) njihalo dođe u ravnotežni položaj. Vrijeme koje njihalu treba za to jednako je četvrtini perioda. Argumentiramo tako da u harmoničkoj oscilaciji kut njihala od ravnoteže možemo prikazati s kosinus funkcijom. Prva nultočka te funkcije je na četvrtini perioda. Postavljamo jednadžbu:

$$0.5\text{s} = 3T_O = \frac{1}{4}T_{Nj}$$

$$0.5\text{s} = 3 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$6.34 \cdot 10^{-3}\text{s}^2 = 9\frac{m}{k} = \frac{1}{16}\frac{l}{g}$$

Iz relacije vidimo da je omjer mase i konstante opruge: **(3 boda)**

$$\frac{m}{k} = 7.04 \cdot 10^{-4}\text{s}^2 \ ,$$

te da je duljina niti l: **(3 boda)**

$$l = 6.34 \cdot 10^{-3} \cdot 16\ g\ \text{s}^2 = 99.5\ \text{cm}$$

Zadatak 3 (10 bodova)

Zbog promjene magnetskog polja dolazi do indukcije elektromotorne sile ε u zavojnici s N namotaja po zakonu **(2 boda)**

$$\varepsilon = N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

gdje je Φ_B tok magnetskog polja definiran s **(2 boda)**

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS\cos\alpha$$

gdje je S površina koju zatvara zavojnica u obliku kvadrata a $\alpha = 60°$ je kut koji zatvara ta površina u odnosu na smjer polja. **(2 boda)**

Površinu u obliku kvadrata možemo izraziti preko duljine stranice $S = a^2$. Uvrštavanjem svih relacija u formulu:

$$\varepsilon = N\frac{\Delta B a^2 \cos\alpha}{t}$$

možemo izračunati duljinu stranice **(2 boda)**

$$a = \sqrt{\frac{\varepsilon t}{N\Delta B\cos\alpha}} = 0.032\ \text{m}$$

Zavojnica se sastoji od 100 namotaja gdje je svaki namotaj opsega $4a$, pa je ukupna duljina žice $400\ a$ tj. $L = 12.65$ m. **(2 boda)**

Zadatak 4 (10 bodova)

Elektron u magnetskom polju se giba po kružnici okomito na smjer magnetskog polja, u ovom slučaju kružno gibanje elektrona je u xy-ravnini. U smjeru osi $\hat{z}$ na elektron ne djeluje sila pa mu se ta komponenta brzine ne mijenja. **(2 boda)**

Centripetalna sila koja djeluje na elektron je dana s Lorentzovom silom:

$$F_{CP} = q\vec{v} \times \vec{B} = -e(v_x B_z(-\hat{y}))$$

Akceleraciju očitamo iz centripetalne sile: $F_{CP} = m_e a$, pa je akceleracija:

$$\vec{a} = \frac{e v_x B_z}{m_e}\vec{j}$$

Komponente akceleracije u tom trenutku su dakle: $a_x = 0, a_y = 1.76 \cdot 10^8, a_z = 0$ m/s^2. **(3 boda)**

Elektron će ponovno imati brzinu $v_y = 0$ kada prijeđe polovicu kruga. Tada će $v_x = -100$ m/s. **(2 boda)**

Vrijeme koje mu treba da to napravi možemo naći iz brzine elektrona i opsega kružnice. Centripetalnu akceleraciju možemo povezati s obodnom brzinom i radijusom kao:

$$a_{CP} = \frac{v^2}{r}$$

Iz te relacije možemo naći $r = 5.68 \cdot 10^{-5}$ m te opseg $O = 2\pi r = 3.57 \cdot 10^{-4}$ m. Stoga je vrijeme potrebno da pređe pola opsega: $t = \frac{O}{2v} = 1.78$ μs. **(2 boda)**

U tom trenutku će $v_z = 50$ m/s, tj. neće se promijeniti, a put koji će prijeći elektron duž z-osi je: **(1 bod)**

$$s_z = v_z t = 89\ \mu\text{m}$$

Zadatak 5 (10 bodova)

1. Možemo iskoristiti zakon o očuvanju energije. Monika na početku ima brzinu $v = 0$ a nalazi se na visini $H = 40$ m u odnosu na najnižu točku. Zbroj potencijalne i kinetičke energije mora biti konstantan, pa će Monika imati najveću brzinu kada joj je potencijalna energija najmanja, u dnu udubine. **(2 boda)**

2. Pišemo **(3 boda)**

$$0 + mgH = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = 28 \text{ m/s}$$

3. Primjetimo da se Monika u polukružnoj udubini ponaša kao matematičko njihalo duljine niti $l = R$. **(3 boda)**

   Period njihanja je stoga za male odmake od ravnoteže: **(2 boda)**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 12.7 \text{ s}$$