Državno natjecanje iz fizike 2020/2021
Srednje škole – 1. grupa
Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (18 bodova)

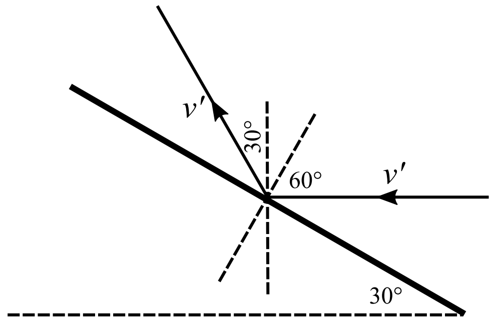
Definirajmo koordinatni sustav mirnog promatrača tako da je u njemu brzina automobila u pozitivnom smjeru x-osi tj. $\vec{v}_A = v_A\hat{x}$. Tada je brzina metka u mirnom sustavu neposredno prije udara u vjetrobransko staklo automobila $\vec{v} = -v\hat{x}$. U sustavu, koji se giba brzinom automobila u odnosu na mirni sustav, brzina gumenog metka neposredno prije udara u vjetrobransko staklo je:

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_A$

$\vec{v}' = -(v + v_A)\,\hat{x}$

$v' = -(v + v_A) = -74$ km/h. **(1 bod)**

Prilikom sudara gumeni metak se odbija od vjetrobranskog stakla pod istim kutem pod kojim i upada (vidi sliku). Neposredno nakon sudara horizontalna i vertikalna komponenta brzine metka su:



$v'_{x0} = -\frac{1}{2}|v'| = -37$ km/h **(1 bod)**

$v'_{y0} = \frac{\sqrt{3}}{2}|v'| = 64.1$ km/h **(1 bod)**

Komponente brzine metka u sustavu mirnog promatrača na tlu jednake su:

$v_{x0} = v'_{x0} + v_A = 23$ km/h **(1 bod)**

$v_{y0} = v'_{y0}$ **(1 bod)**

Maksimalna visina, koju postiže metak, jednaka je:

$h_{max} = h_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g}$

$h_{max} = 1.5$ m $+ 16.2$ m $= 17.7$ m **(3 boda)**

Vrijeme potrebno da metak padne na tlo jednako je zbroju vremena potrebnog do maksimalne visine i vremena pada s maksimalne visine na tlo. Najprije odredimo vrijeme potrebno da postigne maksimalnu visinu:

$v_y(t) = v_{y0} - gt$

U najvišoj točki putanje $v_y = 0$ pa slijedi:

$t_1 = \frac{v_{y0}}{g} = 64.1 \cdot \frac{1000}{3600}\ \text{m/s} \cdot \frac{1}{9.81\ \text{m/s}^2} = 1.82$ s **(1 bod)**

Vrijeme pada s visine h_{max} jednako je:

$h_{max} = \frac{1}{2}gt_2^2$

$t_2 = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = 1.9$ s **(1 bod)**

Ukupno vrijeme potrebno da metak padne na tlo jednako je:

$t_{pad} = t_1 + t_2 = 3.72$ s. **(1 bod)**

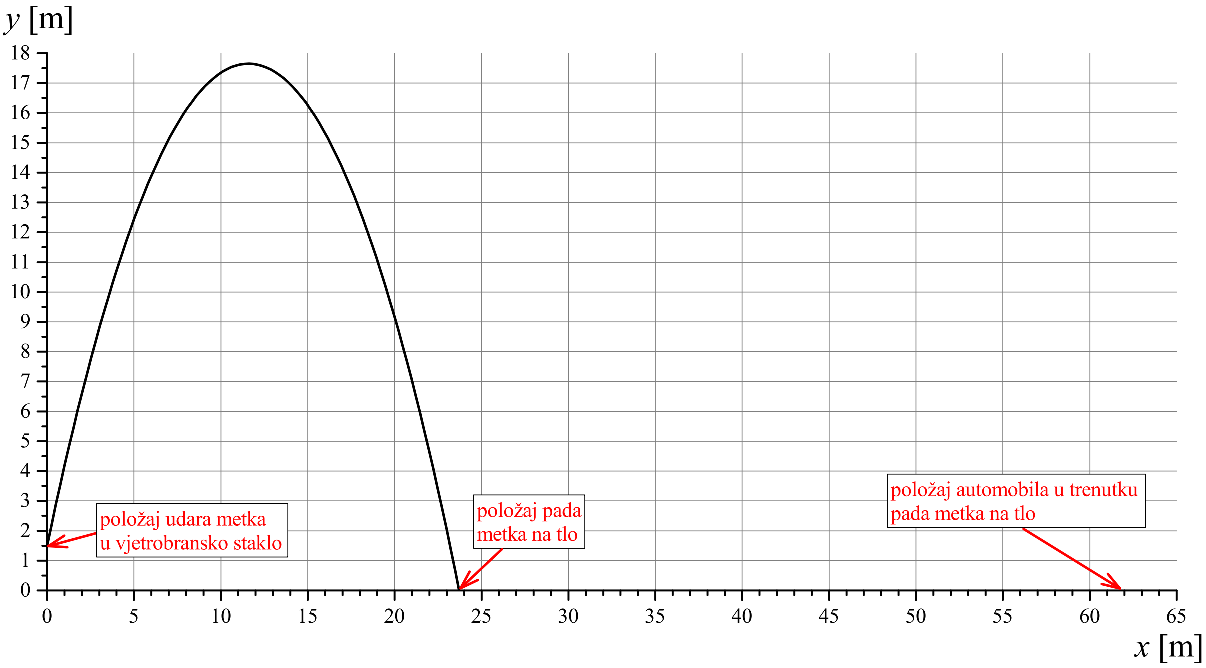
U tom vremenu metak će prijeći horizontalnu udaljenost:

$d = v_{x0}t_{pad} = 23 \cdot \frac{1000}{3600}\ \text{m/s} \cdot 3.72\ \text{s} = 23.8$ m. **(1 bod)**

U istom vremenu automobil će prijeći horizontalnu udaljenost:

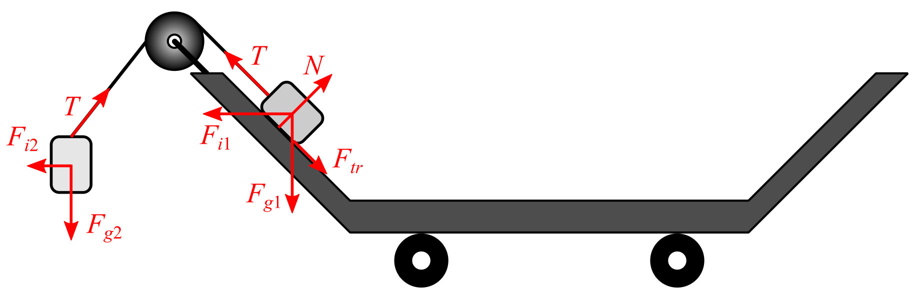
$d = v_A t_{pad} = 60 \cdot \frac{1000}{3600}\ \text{m/s} \cdot 3.72\ \text{s} = 62$ m. **(1 bod)**

Horizontalna udaljenost metka i automobila u trenutku pada metka na tlo jednaka je $\Delta x = 62\ \mathrm{m} - 23.8\ \mathrm{m} = 38.2\ \mathrm{m}$, što se može izračunati i kao $v'_{x0} t_{pad} = 38.2\ \mathrm{m}$. **(1 bod)** Skica putanje i traženih položaja dana je na sljedećoj slici. (Točna skica putanje: **2 boda**, točno označeni položaji metka i automobila: **2 boda**).



2. zadatak (17 bodova)

Na slici su prikazane sile koje djeluju na oba utega u sustavu kolica (**2 boda** za dijagram sila). Pretpostavimo da bi se u slučaju gibanja utega u odnosu na kolica uteg mase m_1 gibao uz kosu stranicu kolica. Kut koji kosina kolica zatvara s horizintalom je 45°.



Drugi Newtonov zakon za uteg mase m_1 (u slučaju mirovanja u odnosu na kolica) pišemo po komponentama paralelno i okomito na kosinu:

$0 = T + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{i1} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{g1} - F_{tr}$ **(1 bod)**

$0 = N - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{i1} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{g1}$ **(1 bod)**

Drugi Newtonov zakon za uteg mase m_2 (u slučaju mirovanja u odnosu na kolica) pišemo po komponentama paralelno i okomito na horizontalnu podlogu:

$0 = T_x - F_{i2}$ **(1 bod)**

$0 = T_y - F_{g2}$ **(1 bod)**

Inercijalna sila na utege je: $F_{i1} = m_1 a$, $F_{i2} = m_2 a$ **(1 bod)**. Uvrštavanjem u jednadžbe za uteg mase m_2 dobije se:

$0 = T_x - m_2 a$

$0 = T_y - m_2 g$

Sada možemo izračunati napetost užeta T:

$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = m_2\sqrt{a^2+g^2} = m_2\sqrt{\frac{9}{16}g^2 + g^2} = \frac{5}{4}m_2 g.$ **(2 boda)**

U jednadžbe za uteg mase m_1 uvrstimo napetost užeta T, izraz za inercijalnu silu F_{i1} i silu trenja $F_{tr} = \mu N$ **(1 bod)**:

$0 = \frac{5}{4}m_2 g + \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 a - \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 g - \mu N$

$0 = N - \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 a - \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 g$

Iz druge jednadžbe slijedi da je sila reakcije podloge N jednaka:

$N = \frac{\sqrt{2}}{2}m_1(a+g) = \frac{\sqrt{2}}{2}m_1\frac{7}{4}g = \frac{7\sqrt{2}}{8}m_1 g$ **(3 boda)**

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobije se:

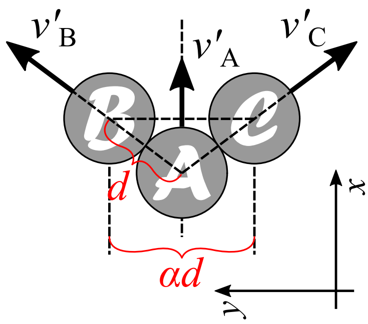
$\mu\frac{7\sqrt{2}}{8}m_1 g = \frac{5}{4}m_2 g + \frac{\sqrt{2}}{2}m_1(a-g)$

$\mu\frac{7\sqrt{2}}{8}m_1 g = \frac{5}{4}m_2 g - \frac{\sqrt{2}}{8}m_1 g$

$\mu = \frac{10}{7\sqrt{2}}\frac{m_2}{m_1} - \frac{1}{7}$

$\mu = \frac{1}{7}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 1\right) = 0.362$ **(4 boda)**

3. zadatak (17 bodova)



Novčići B i C dobit će brzinu u smjeru spojnice središta novčića s novčićem A tj. okomito na tangentu na obod novčića u točki dodira s novčićem A (vidi sliku). Zbog simetrije problema iznosi brzina novčića B i C nakon sudara bit će jednaki $v'_B = v'_C = v'$. **(1 bod)**

Zakon očuvanja količine gibanja za ovaj sudar napišemo po komponentama u koordinatnom sustavu:

$mv_A = mv'_A + mv'_{Bx} + mv'_{Cx}$ **(1 bod)**

$0 = mv'_{By} - mv'_{Cy}$ **(1 bod)**

Zakon očuvanja energije glasi:

$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_A'^2 + \frac{1}{2}mv_B'^2 + \frac{1}{2}mv_C'^2$ **(2 boda)**

Nakon sređivanja dobiju se sljedeće jednadžbe:

$v_A = v'_A + 2v'_x$ **(1 bod)**

$v_A^2 = v_A'^2 + 2v'^2$ **(1 bod)**

Pomoću sličnosti trokuta dobije se da vrijedi:

$\frac{v'_y}{v'} = \frac{\frac{1}{2}\alpha d}{d}$ **(2 boda)**

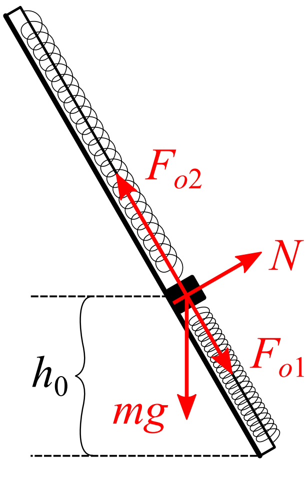
Prema tome komponente brzine novčića B i C nakon sudara izrazimo na sljedeći način:

$v'_y = \frac{1}{2}\alpha v'$, $v'_x = \sqrt{v'^2 - v_y'^2} = v'\sqrt{1 - \frac{1}{4}\alpha^2}$ **(2 boda)**

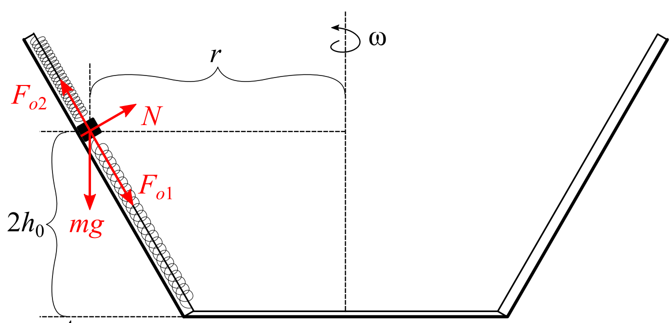
Dalje rješavamo sustav jednadžbi:
$v_A - v'_A = 2v'_x$
$v_A^2 - v'^2_A = (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = 2v'^2$
Prvu jednadžbu kvadriramo i uvrstimo izraz za v'_x:
$(v_A - v'_A)^2 = 4v'^2\left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right)$
Iz druge jednadžbe uvrstimo v'^2:
$(v_A - v'_A)^2 = 2(v_A - v'_A)(v_A + v'_A)\left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right)$
$v'_A\left(2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + 1\right) = v_A\left(1 - 2 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)$
$v'_A(6 - \alpha^2) = v_A(\alpha^2 - 2)$
Slijedi da je brzina novčića A nakon sudara:
$v'_A = v_A\frac{\alpha^2 - 2}{6 - \alpha^2}$ **(4 boda)**
Novčić A miruje nakon sudara kada je ispunjen uvjet:
$v'_A = 0 \;\Rightarrow\; \alpha^2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \sqrt{2}$ **(2 boda)**

4. zadatak (18 bodova)

Sve sile, koje djeluju na uteg u početnom položaju prikazane su na slici desno. Kut između kose stranice posude i vertikale je 30°. Iz uvjeta da uteg miruje slijedi sljedeća jednadžba za smjer paralelan kosini:



$0 = mg\frac{\sqrt{3}}{2} + F_{o1} - F_{o2}$ **(1 bod)**
Sile opruge F_{o1} i F_{o2} jednake su:
$F_{o1} = k(l_1 - l_0)$, $F_{o2} = k(l_2 - l_0)$ **(1 bod)**, gdje je l_0 duljina nerastegnute opruge. Na slici se može vidjeti da vrijedi:
$h_0 = \frac{d}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l_1$,
slijedi da je $l_1 = \frac{1}{3}d$. **(1 bod)**
Duljina $l_2 = d - l_1 = \frac{2}{3}d$. **(1 bod)**
Uvrstimo u početnu jednadžbu:
$0 = mg\frac{\sqrt{3}}{2} + k\left(\frac{1}{3}d - l_0\right) - k\left(\frac{2}{3}d - l_0\right)$
$\frac{1}{3}kd = mg\frac{\sqrt{3}}{2}$
$k = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{d}$ **(2 boda)**
U slučaju kada posuda rotira položaj utega i sve sile koje djeluju na uteg prikazane su na slici desno. Zbroj svih sila na tijelo jednak je centripetalnoj sili. Drugi Newtonov zakon napišemo po komponentama:



$F_{cp} = N\frac{\sqrt{3}}{2} + F'_{o1}\frac{1}{2} - F'_{o2}\frac{1}{2}$, **(1 bod)**
$mg + F'_{o1}\frac{\sqrt{3}}{2} = N\frac{1}{2} + F'_{o2}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **(1 bod)**
Sile opruge sada su jednake: $F'_{o1} = k\left(l'_1 - l_0\right)$, $F'_{o2} = k\left(l'_2 - l_0\right)$, gdje je:
$l'_1 = 2h_0\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}d$,
$l'_2 = d - l'_1 = \frac{1}{3}d$. **(1 bod)**
Uvrstimo u drugu jednadžbu:
$mg + k\left(\frac{2}{3}d - l_0 - \frac{1}{3}d + l_0\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = N\frac{1}{2}$
$N = 2mg + \frac{1}{\sqrt{3}}kd$
$N = 2mg + \frac{d}{\sqrt{3}}\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{d}$
$N = \frac{7}{2}mg$ **(2 boda)**

Centripetalna sila je $F_{cp} = m\frac{v^2}{r}$ **(1 bod)**. Uvrštavanjem izraza za F_{cp} i N u prvu jednadžbu dobije se:
$m\frac{v^2}{r} = \frac{7}{2}mg\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}kd\frac{1}{2}$
$m\frac{v^2}{r} = \frac{7\sqrt{3}}{4}mg + \frac{1}{6}\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{mg}{d}d$
$\frac{v^2}{r} = 2\sqrt{3}g$ **(2 boda)**
Brzina kružnog gibanja jednaka je $v = r\omega$, a polumjer gibanja je jednak:
$r = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}l'_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)d = \frac{5}{6}d$ **(1 bod)**.
Uvrštavanjem slijedi:
$\frac{5}{6}d\omega^2 = 2\sqrt{3}g$
$\omega^2 = \frac{12\sqrt{3}}{5}\frac{g}{d} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{5}\frac{g}{d}} = 7.4\ \mathrm{rad/s}$ **(3 boda)**