

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2022/2023

Srednje škole 4. grupa

VAŽNO: Tijekom ispita ne smiješ imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...). Za pisanje se koristi kemijskom olovkom ili nalivperom. Ne smiješ imati mobitel ni druge elektroničke uređaje. Dopušteno je korištenje kalkulatorom.

1. zadatak (11 bodova)

Uranij-olovo datiranje je tehnika slična datiranju objekata s pomoću C-14 izotopa ugljika. Ta je metoda preciznija u nekim slučajevima, npr. datiranju cirkonskih stijena. Temelji se na određivanju koncentracija uranij-238, uranij-235, olovo-207 i olovo-206 izotopa. Pri formaciji cirkonskih stijena u njima je prisutno i nešto izotopa uranija, ali nema izotopa olova. S vremenom se izotopi uranija raspadaju (serijom α i β^- raspada), a krajnji su produkti izotopi olova, kao što je prikazano na slici 1.

a.) Koliko se α i β^- raspada treba dogoditi da od U-235 nastane Pb-207?

b.) Analizom je ustanovljeno da u određenome uzorku cirkona vrijedi $N(U - 235)/N(U - 238) = 3.86 \times 10^{-3}$ i $N(Pb - 207)/N(U - 235) = 3.23$. Odredi starost uzorka i početni brojčani omjer izotopa U-235 i U-238.

c.) Koliki je maksimalni mogući brojčani omjer Pa-231 i U-235 u uzorku cirkona nepoznate starosti?

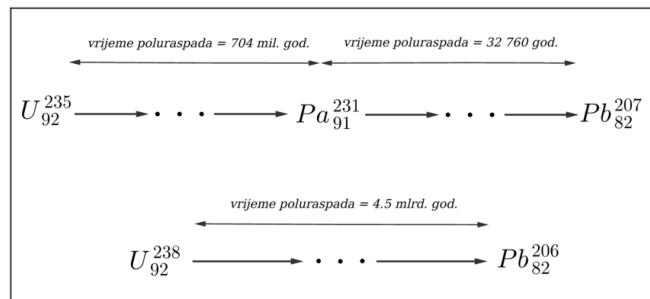
Vremena poluraspada U-235 i U-238 (i starost stijena) su znatno veća od vremena poluraspada ostalih izotopa u serijama raspada U-235 i U-238. Protaktinij-231 (Pa-231) se pojavljuje samo u seriji raspada U-235 te je njegovo vrijeme poluraspada znatno veće od vremena poluraspada ostalih izotopa u seriji U-235 (osim U-235 izotopa).

2. zadatak (12 bodova)

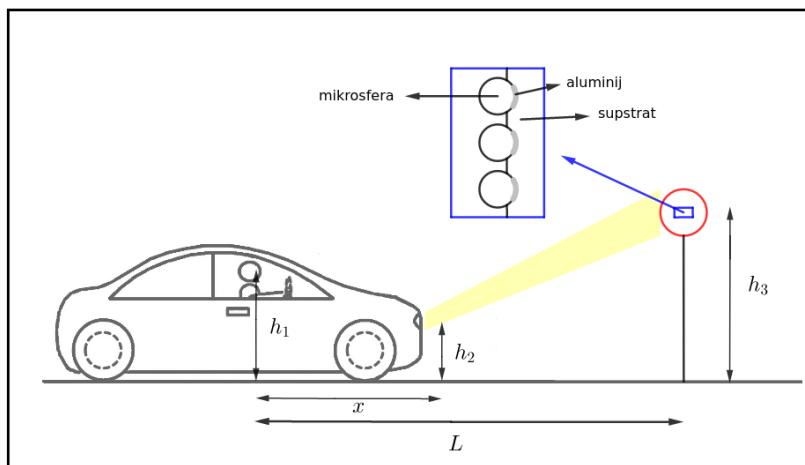
Retroreflektivni materijal reflektira većinu upadne svjetlosti nazad prema izvoru (tj. u neki mali prostorni kut oko izvora). Promotri automobil koji se kreće ravnom cestom po mraku (slika 2). Svjetla se vozila nalaze na visini h_2 , oči vozača na visini h_1 , a horizontalna je udaljenost između svjetla i očiju vozača x . Prometni se znak retroreflektivne površine nalazi na udaljenosti L od vozača i na visini h_3 . Površina je znaka načinjena od velikog broja mikrosfera ugrađenih u supstrat. Mikrosfere su djelomično obložene reflektirajućim slojem aluminija (koji se ponaša kao zrcalo) i načinjene su od materijala indeksa loma n_m .

a.) Promotri proces kad se zraka lomi na granici zrak-mikrosfera, zatim reflektira od aluminija, te lomi na granici mikrosfera-zrak. Odredi jednadžbu koja opisuje kako upadni kut svjetlosti na granicu zrak-mikrosfera ovisi o h_1 , h_2 , h_3 , x i L tako da povratna zraka pogodi vozačeve oči. Pretpostavi da nakon prvog loma zraka uvijek upada na reflektirajući sloj aluminija. Pojednostavi jednadžbu za slučaj velikih udaljenosti L koristeći se aproksimacijama: $\arcsin(\sin(x)/n) = x/n - (n^2 - 1)x^3/(6n^3)$ i $\arctan(x) = x$. Izračunaj taj upadni kut na mikrosferu za slučaj $n_m = 2$, $L = 40$ m, $h_1 = 1.1$ m, $h_2 = 0.6$ m, $h_3 = 2.1$ m i $x = 1.3$ m.

b.) Za parametre iz dijela a.) odredi najmanju udaljenost između mikrosfera d tako da intenzitet svjetlosti valne duljine 550 nm koju vozač vidi bude maksimalan (razmatrajući samo jedan vertikalni red mikrosfera). Koristi se $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ za $x \ll 1$.



Slika 1: Prikaz serije raspada U-235 i U-238. Tri točke označavaju postojanje dodatnih raspada između početnog i konačnog izotopa, a dana vremena poluraspada su sume pojedinačnih vremena raspada u obuhvaćenom intervalu.



Slika 2: Automobil osvjetljjava retroreflektivni prometni znak.

3. zadatak (13 bodova)

Pretvorba se vodika u helij u Suncu događa u više koraka. Prvi je korak "pretvorba" dvaju protona u deuterij (pp reakcija). Da se protoni mogu dovoljno približiti, potrebno je nadvladati odbojnu elektromagnetsku silu. Na slici 3. je prikazana kulonska potencijalna energija, gdje je R_0 polumjer deuterija (potrebna udaljenost na koju se protoni trebaju približiti kako bi se reakcija odvila). Ako je energija čestice klasično nedovoljna za nadvladanje potencijalne barijere (tj. elektromagnetske sile), u kvantnom je svijetu proces i dalje moguć te je njegova vjerojatnost približno proporcionalna $\exp(-a\sqrt{w})$, gdje je w širina potencijalne barijere kroz koju čestica treba tunelirati. Na slici 3. E_{cm} označava ukupnu kinetičku energiju obaju protona u sustavu u kojima njihov centar mase miruje.

a.) Odredi kako vjerojatnost tuneliranja ovisi o E_{cm} . Uzmi da je energija protona puno manja od visine barijere, tj. da je R_0 potpuno zanemariv naspram udaljenosti na koju se protoni mogu klasično približiti.

b.) Na temperaturi T vjerojatnost da kinetička energija dvaju protona u sustavu centra mase iznosi E_{cm} je proporcionalna $\exp(-E_{cm}/(kT))$. Skiciraj (kvalitativno) kako brzina reakcije na temperaturi T ovisi o kinetičkoj energiji protona u sustavu centra mase E_{cm} . Odredi na kojoj je energiji E_{cm} brzina reakcije maksimalna u jezgri Sunca. Temperatura jezgre iznosi oko 15 milijuna kelvina, a konstanta $a = 1.844 \times 10^7 \text{ m}^{-1/2}$. Vrijedi $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ za $x \ll 1$.

c.) Odredi omjer brzine reakcije u jezgri Sunca s brzinom reakcije na polovici njegovog radijusa. Temperatura na polovici radijusa je oko 5 milijuna kelvina, a gustoća je 100 puta manja od gustoće jezgre. Pretpostavi da se reakcija odvija samo na energiji na kojoj je brzina reakcije maksimalna na temperaturi T .

4. zadatak (14 bodova)

Promotri interferometar na slici 4. Koherentni snop elektrona iz izvora (točke I) upada na "razdjelnik" gdje se pola snopa reflektira, a pola transmitira. Zatim se dva snopa reflektiraju od "zrcala", reflektiraju/transmitiraju na razdjelniku te napokon upadaju na detektor. Kad je interferometar orijentiran tako da je ravnina koju zatvaraju dva snopa paralelna sa Zemljinom površinom, nema razlike u fazi između dvaju snopova kad dospiju u detektor.

a.) Odredi razliku u fazi za nerelativistički snop kada je interferometar zaratiran za kut ψ oko osi kroz koju prolazi upadna zraka iz izvora I .

b.) Odredi razliku u fazi za ultrarelativistički slučaj, tj. kada je $pc \gg mc^2 \gg mgL$.

U oba slučaja možeš se koristiti $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ za $x \ll 1$.

c.) Odredi koliko mora iznositi udaljenost razdjelnik-zrcalo L da se barem jednom ostvari uvjet destruktivne interferencije kada se kut ψ mijenja u rasponu između 0° i 90° za snop u kojemu je ukupna energija pojedinoga elektrona 400 MeV.

Vrijednosti potrebnih fizikalnih konstanta:

$$\text{permitivnost vakuuma } \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \text{s}^4 \text{kg}^{-1} \text{m}^{-3}$$

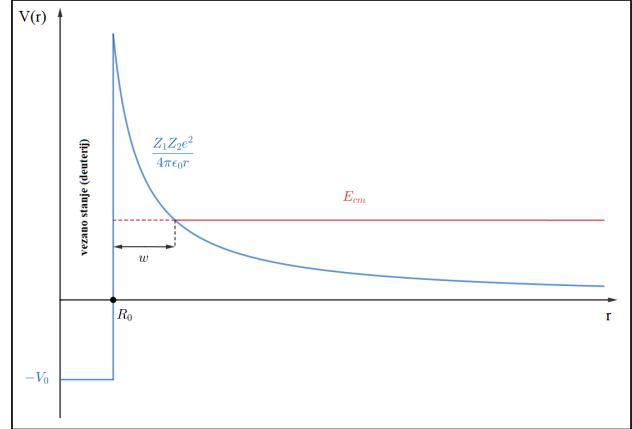
$$\text{Boltzmannova konstanta } k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{kgs}^{-2} \text{K}^{-1}$$

$$\text{brzina svjetlosti } c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

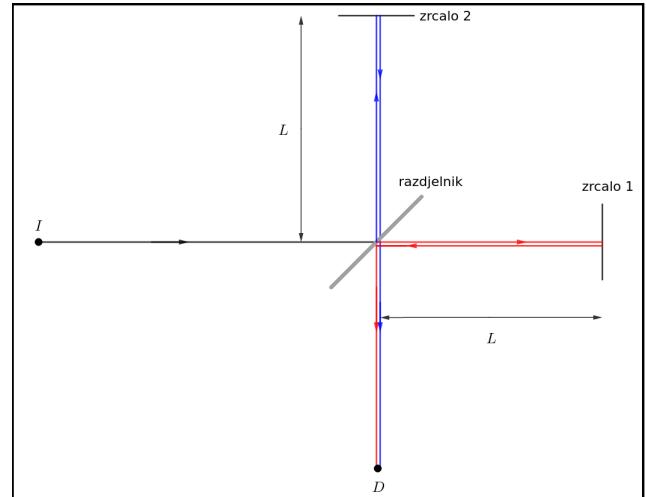
$$\text{masa elektrona } m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{gravitacijsko ubrzanje Zemlje } g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{Planckova konstanta } h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ kgm}^2 \text{s}^{-1}$$



Slika 3: Ovisnost potencijalne energije o međusobnoj udaljenosti dvaju protona. Ako se protoni dovoljno približe i dođe do tuneliranja kroz potencijalnu barijeru ostvari se vezano stanje (deuterij).



Slika 4: Skica interferometra. Snop se dijeli na dva na razdjelniku, te oba snopa dolaze na detektor (točka D) nakon refleksije na zrcalu.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Podgora, 8. – 11. svibnja 2023.

Srednje škole – 4. grupa

EKSPERIMENTALNI ZADATAK

Pribor:

- ravnalo
- baterija 1,5 V
- bijeli papir
- karton
- škare
- selotejp
- drveno postolje
- šibice
- 8 lučica
- plastelin
- permanentni marker

Zadatak:

1. Koristeći navedeni pribor pripremite Rumfordov i Riccijev optički fotometar tako da:
 - a) definirate osnovni princip rada optičkog fotometra i navedete odgovarajući algebarski izraz; 2 boda
 - b) skicom i riječima objasnite sličnosti i razlike Rumfordova i Riccijeva optičkog fotometra; 4 boda
 - c) odredite omjer jakosti dva izvora svjetlosti koji se oba sastoje od samo jedne lučice; 2 boda
 - d) odredite omjer jakosti dva izvora svjetlosti koji se sastoje od jedne i od dvije lučice; 2 boda
 - e) odredite omjer jakosti dva izvora svjetlosti koji se sastoje od jedne i od tri lučice; 2 boda
 - f) eksperimentalni rad pod c), d) i e) zorno opišite riječima i skicom za oba fotometra; 4 boda
 - g) rezultate za minimalno tri mjerenja pod c), d) i e) za oba fotometra prikažite tablično; 4 boda
 - h) provedite račun pogreške koji uključuje određivanje srednje vrijednosti, odstupanja pojedinačnih mjerena od srednje vrijednosti, apsolutne vrijednosti maksimalnog odstupanja, relativne maksimalne pogreške i zapis točnog rezultata; 4 boda
 - i) komentirajte dobivene relativne maksimalne pogreške; 1 bod
 - j) usporedite teorijske vrijednosti prema algebarskom izrazu pod a) s eksperimentalnim vrijednostima u tablicama pod g); 2 boda
 - k) prema stečenom eksperimentalnom iskustvu ukratko navedite što sve utječe na preciznost mjerena; 1 bod
 - l) odredite koliko biste ukupno kombinacija izvora svjetlosti mogli eksperimentalno provjeriti s dobivenim priborom? 1 bod
 - m) objasnite na koji biste način odredili jakost jedne lučice ako je drugi izvor žarulja poznatih vrijednosti otpora i napona. 1 bod

Ukupno: **30 bodova**

Natjecateljima želimo uspješan rad!

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2022/2023

Srednje škole 4. grupa

Rješenja i upute za bodovanje

VAŽNO: Ovdje je prikazan jedan način rješavanja zadatka. Ako učenici riješe zadatak drugčijim, a fizikalno ispravnim načinom, treba im dati puni broj bodova predviđen za taj zadatak. Ako učenici ne napišu posebno svaki ovdje predviđeni korak, a vidljivo je da su ga napravili, treba im dati bodove kao da su ga napisali.

1. zadatak (15 bodova)

a.) Produkt α -raspada ima 4 nukleona manje od početnog izotopa (2 protona i 2 neutrona). Produkt β^- -raspada ima dodatni proton naspram počenog izotopa, ali je broj nukleona očuvan. [1 bod]

Dakle, slijedi:

$$\Delta A = -4N(\alpha) \quad (1)$$

$$\Delta Z = -2N(\alpha) + N(\beta^-) \quad [2 \text{ bod}]. \quad (2)$$

Pb-207 ima 28 nukleona manje od početnog U-235 izotopa, tj. 10 protona manje. Uvrštavanjem u (1) i (2) slijedi: $N(\alpha) = 7$ i $N(\beta^-) = 4$. [1 bod]

b.) S obzirom da je vrijeme poluraspada izotopa uranija puno veće od vremena poluraspada ostalih izotopa u serijama, vrlo dobra aproksimacija je razmatrati procese kao direktnе raspade izotopa uranija u izotope olova. Tada prema zakonu radioaktivnog raspada možemo napisati sljedeće vremenske ovisnosti broja pojedinih izotopa u uzorku:

$$N(U - 235) = N_0(U - 235) \exp(-\lambda_{235}t), \quad (3)$$

$$N(U - 238) = N_0(U - 238) \exp(-\lambda_{238}t), \quad (4)$$

$$N(Pb - 207) = N_0(U - 235) [1 - \exp(-\lambda_{235}t)], \quad (5)$$

$$N(Pb - 206) = N_0(U - 238) [1 - \exp(-\lambda_{238}t)], \quad (6)$$

gdje je $\lambda_{238} = \frac{\ln 2}{t_{1/2, 238}}$ i $\lambda_{235} = \frac{\ln 2}{t_{1/2, 235}}$; $t_{1/2, X}$ je vrijeme poluraspada izotopa X , a $N_0(X)$ je početni broj izotopa X . [3 boda]

Zadani omjeri su tada:

$$\frac{N(U - 235)}{N(U - 238)} = \frac{N_0(U - 235)}{N_0(U - 238)} \exp[-t(\lambda_{235} - \lambda_{238})], \quad (7)$$

$$\frac{N(Pb - 207)}{N(U - 235)} = \frac{1 - \exp(-\lambda_{235}t)}{\exp(-\lambda_{235}t)}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (8)$$

Iz jednadbe (8) možemo dobiti starost uzorka:

$$t = \frac{1}{\lambda_{235}} \ln \left[\frac{N(Pb - 207)}{N(U - 235)} + 1 \right] = \frac{t_{1/2, 235}}{\ln 2} \ln \left[\frac{N(Pb - 207)}{N(U - 235)} + 1 \right] = 1.465 \text{ mlrd. god.} \quad [1 \text{ bod}] \quad (9)$$

Također je tada jednostavno dobiti početne omjere izotopa uranija:

$$\frac{N_0(U - 235)}{N_0(U - 238)} = \frac{N(U - 235)}{N(U - 238)} \exp[t(\lambda_{235} - \lambda_{238})] = 0.013 \quad [1 \text{ bod}] \quad (10)$$

c.) Promjena broja izotopa Pa-231 u vremenskom intervalu Δt je dana razlikom aktivnosti U-235 i Pa-231:

$$\frac{\Delta N(Pa - 231)}{\Delta t} = \lambda_{235}N(U - 235) - \lambda_{231}N(Pa - 231). \quad [2 \text{ boda}] \quad (11)$$

S obzirom da je $t_{1/2, 235} \gg t_{1/2, 231}$ broj izotopa $U - 235$ će biti gotovo konstantan na vrenenskoj skali na kojoj broj Pa-231 izotopa može značajno varirati. Iz toga možemo zaključiti da je $\Delta N(Pa - 231)/\Delta t > 0$ sve dok vrijedi $N(Pa - 231)/N(U - 235) < \lambda_{235}/\lambda_{231}$, tj. broj Pa-231 izotopa raste sve dok ne dosegne takvu vrijednost da je omjer broja Pa-231 i U-235 jednak:

$$\frac{N(Pa - 231)}{N(U - 235)} = \frac{\lambda_{235}}{\lambda_{231}} = \frac{t_{1/2, 231}}{t_{1/2, 235}} = 4.65 \times 10^{-5}. \quad [3 \text{ boda}]. \quad (12)$$

Egziktnim rješavanjem jednadžbe (11) (gdje $\Delta t \rightarrow 0$) i korištenjem (3) uvidjeli bi da se omjer broja Pa-231 i U-235 izotopa asimptotski približava $\lambda_{235}/(\lambda_{231} - \lambda_{235}) \approx \lambda_{235}/\lambda_{231}$ kada $t \rightarrow \infty$.

2. zadatak (17 bodova)

a.) Promotri prikaz na slici 1. Kut ϕ je upadni kut zrake na mikrosferu, γ je kut između upadne zrake i horizontale, γ' je kut izlazne zrake u odnosu na horizontalu, β je kut pod kojim se zraka svjetlosti lomi. Kut refleksije (na aluminiju) je također β što se može zaključiti iz dane geometrije. Korisno je odrediti ukupni kut devijacije zrake. On iznosi:

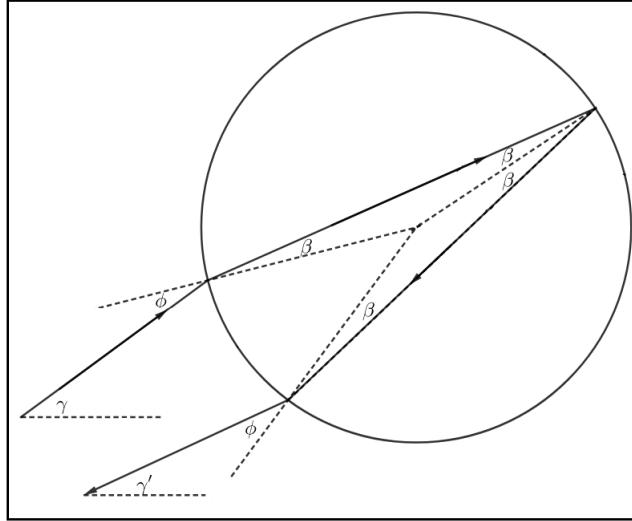
$$\Delta = (\phi - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\phi - \beta) = \pi + 2\phi - 4\beta, \quad [3 \text{ boda}] \quad (13)$$

gdje je Δ pozitivan kada se zraka zakreće u smjeru kazaljke na satu. Da povratna zraka upadne u vozačeve oči mora vrijediti:

$$\Delta = \pi + \gamma - \gamma', \quad \gamma = \arctan\left(\frac{h_3 - h_2}{L - x}\right), \quad \gamma' = \arctan\left(\frac{h_3 - h_1}{L}\right), \quad [1 \text{ bod}] \quad (14)$$

Kombiniranjem (13) i (14) i korištenjem Snellovog zakona ($\sin \phi = n_m \sin \beta$) napokon slijedi:

$$2\phi - 4 \arcsin\left(\frac{\sin \phi}{n_m}\right) = \arctan\left(\frac{h_3 - h_2}{L - x}\right) - \arctan\left(\frac{h_3 - h_1}{L}\right). \quad [2 \text{ boda}] \quad (15)$$



Slika 1: Upadna zraka se lomi na mikrosferi, zatim reflektira na drugom kraju, te ponovno lomi.

Nadalje, možemo koristiti zadane aproksimacije čime jednadžba (15) prelazi u:

$$\frac{2(n_m^2 - 1)}{3n_m^3} \phi^3 + \left(2 - \frac{4}{n_m}\right) \phi + \frac{h_3 - h_1}{L} - \frac{h_3 - h_2}{L - x} = 0. \quad [1 \text{ bod}] \quad (16)$$

Za zadani $n_m = 2$ član uz ϕ iščezava, te slijedi (uvrštavanjem ostalih zadanih parametara):

$$\phi = \sqrt[3]{4 \left(\frac{h_3 - h_2}{L - x} - \frac{h_3 - h_1}{L} \right)} = 0.38 \text{ rad } (21.8^\circ) \quad [2 \text{ boda}] \quad (17)$$

b.) Ako promotrimo upadnu svjetlost na dvije susjedne mikrosfere (jedna na visini $h_3 + Nd$, a druga na visini $h_3 + (N+1)d$), razlika puteva tih zraka je:

$$x_1 = \sqrt{(L-x)^2 + [h_3 + (N+1)d - h_2]^2} - \sqrt{(L-x)^2 + (h_3 + Nd - h_2)^2} \approx \frac{h_3 - h_2}{L-x} d, \quad [3 \text{ boda}] \quad (18)$$

kada iskoristimo $(1+x)^n \approx 1+nx$ za $x \ll 1$ uz činjenicu da je $L-x$ puno veći od ostalih dimenzija, te zanemarimo članove proporcionalne d^2 .

Slično možemo dobiti razliku puteva za dvije zrake od mikrosfere do vozačevih očiju:

$$x_2 = \sqrt{L^2 + [h_3 + (N+1)d - h_1]^2} - \sqrt{L^2 + (h_3 + Nd - h_1)^2} \approx \frac{h_3 - h_1}{L} d. \quad [3 \text{ boda}] \quad (19)$$

Minimalna udaljenost mikrosfera za koju se postigne konstruktivna interferencija za svjetlost valne duljine λ je tada:

$$\lambda = x_1 + x_2 \rightarrow d = \lambda \left(\frac{h_3 - h_1}{L} + \frac{h_3 - h_2}{L-x} \right)^{-1} = 8.626 \mu\text{m}. \quad [2 \text{ boda}] \quad (20)$$

3. zadatak (18 bodova)

a.) Udaljenost na koju se protoni mogu klasično približiti je dana s jednakošću:

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = E_{cm}. \quad [2 \text{ boda}] \quad (21)$$

Iz toga slijedi za vjerojatnost tuneliranja:

$$P(E_{cm}) \propto \exp \left(-a \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{cm}}} \right). \quad [1 \text{ bod}] \quad (22)$$

b.) Brzina reakcije za protone energije E_{cm} proporcionalna je umnošku vjerojatnosti da protoni energije E_{cm} tuneliraju kroz potencijalnu barijeru i vjerojatnosti da je njihova energija jednaka E_{cm} :

$$F(E_{cm}) \propto P(E_{cm}) n(E_{cm}) \propto \exp \left(-a \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{cm}}} - \frac{E_{cm}}{kT} \right). \quad [2 \text{ boda}] \quad (23)$$

$P(E_{cm})$ je funkcija koja teži u nulu kada je E_{cm} mali, a za velike E_{cm} se polako približava maksimalnoj vrijednosti, dok je $n(E_{cm})$ "obična" padajuća eksponencijalna funkcija koja se za velike vrijednosti približava nuli. Dakle, njihov umnožak će težiti u nulu kada E_{cm} teži u nulu i za velike E_{cm} , a između tih vrijednosti će postići maksimum, kao što vidimo na slici 2. [2 boda]

Nagib funkcije iznosi nula na poziciji maksimuma, tj. za energiju na kojoj se postiže maksimum vrijedi:

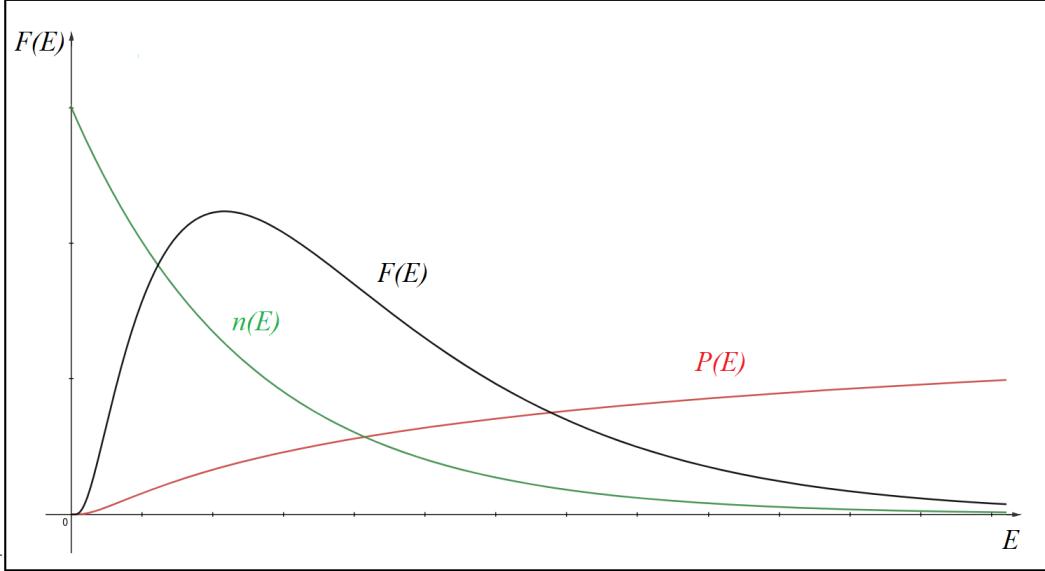
$$\lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{E_{cm} + \Delta E}} - \frac{E_{cm} + \Delta E}{kT} \right) - \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{E_{cm}}} - \frac{E_{cm}}{kT} \right)}{\Delta E} = 0; \quad \alpha = a \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0}}. \quad [2 \text{ boda}] \quad (24)$$

Koristeći $(1+x)^n \approx 1+nx$ za $x \ll 1$ za prvi član u prvoj zagradi i sređivanjem dobivamo:

$$\frac{\alpha}{2E_{cm}\sqrt{E_{cm}}} - \frac{1}{kT} = 0 \rightarrow E_{cm} = \left(\frac{\alpha kT}{2} \right)^{2/3} \quad [2 \text{ boda}] \quad (25)$$

Za jezgru Sunca se uvrštavanjem parametara dobije da je brzina reakcija najveća za:

$$E_{cm} = 9.43 \times 10^{-16} \text{ J (5.9 keV)}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (26)$$



Slika 2: Brzina reakcije u ovisnosti o energiji dvaju protona.

c.) Uvrstimo li uvjet na energiju iz (25) u (23) dobivamo da je brzina reakcije:

$$F(E_{cm}) \propto \exp\left[-(2^{1/3} + 2^{-2/3})\alpha^{2/3}(kT)^{-1/3}\right]. \quad [2 \text{ boda}] \quad (27)$$

Faktor proporcionalnosti ovisi o tome koliko parova protona postoji u nekom malom volumenu, što je onda proporcionalno kvadratu gustoće. **[3 boda]**

Tada vrijedi da je omjer brzina reakcija jednak:

$$\frac{r_{0.5}}{r_{jezgra}} = \frac{1}{100^2} \frac{\exp\left[-(2^{1/3} + 2^{-2/3})\alpha^{2/3}(kT_{0.5})^{-1/3}\right]}{\exp\left[-(2^{1/3} + 2^{-2/3})\alpha^{2/3}(kT_{jezgra})^{-1/3}\right]} = 2.37 \times 10^{-7}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (28)$$

Može se zaključiti da se pp proces odvija gotovo isključivo u jezgri Sunca.

4. zadatak (20 bodova)

a.) Za nerelativistički elektron zakon očuvanja mehaničke energije glasi:

$$\frac{p_0^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} + mgH \Rightarrow \frac{h^2}{2m\lambda_0^2} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} + mgH, \quad [2 \text{ boda}] \quad (29)$$

gdje je p_0 impuls elektrona na visini x , a p na visini $H + x$. Sređivanjem izraza dobivamo:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2m^2gH\lambda_0^2}{h^2}}. \quad [1 \text{ bod}] \quad (30)$$

Faza snopa elektrona koji prijeđe malu udaljenost Δl se promjeni za $2\pi\Delta l/\lambda(l)$, gdje je $\lambda(l)$ valna duljina snopa na promatranom dijelu puta. Promatrajući dva snopa elektrona vidimo da se njihove putanje razlikuju na intervalu razdjelnik-zrcalo-ratzdjelnik. Jedan od snopova na tom intervalu je konstante valne duljine (jer je na konstantnoj visini koju možemo prozvati visinom 0), dok se visina drugog snopa mijenja od 0 do $L \sin \psi$, te nazad do 0. Dakle, za prvi snop ukupna promjena faze je:

$$\Delta\phi_1 = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0} \Rightarrow \phi_1 = \frac{4\pi L}{\lambda_0} \quad [1 \text{ bod}] \quad (31)$$

Za drugi snop promjena faze na malom dijelu na visini H je:

$$\Delta\phi_2(H) = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2m^2gH\lambda_0^2}{h^2}} \approx \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0} \left(1 - \frac{m^2gH\lambda_0^2}{h^2}\right), \quad [\mathbf{1 \, bod}] \quad (32)$$

gdje smo koristili $(1+x)^n \approx 1+nx$ za $x \ll 1$. Prvi član nema ovisnost o H dok je drugi linearan u H . Sumiranjem svih doprinosa na cijelom intervalu slijedi da prvi član jednostavno treba pomnožiti sa $2L$, a doprinos drugog člana je jednak onomu koji bi dobili da uzmemmo $H = const = L \sin \psi / 2$ (prosječna visina) i pomnožimo sve s $2L$. Tada slijedi:

$$\phi_2 = \frac{4\pi L}{\lambda_0} - 2\pi \frac{m^2gL^2\lambda_0 \sin \psi}{h^2} \quad (33)$$

Napokon dobivamo razliku u fazi dva snopa za nerelativistički slučaj:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{m^2gL^2\lambda_0 \sin \psi}{h^2} \quad [\mathbf{3 \, boda}] \quad (34)$$

b.) Za relativistički slučaj zakon očuvanja energije poprima sljedeću formu:

$$\sqrt{\frac{h^2c^2}{\lambda_0^2} + m^2c^4} = \sqrt{\frac{h^2c^2}{\lambda^2} + m^2c^4 + mgH}. \quad [\mathbf{2 \, boda}] \quad (35)$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo (zanemarujući član $m^2g^2H^2$):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2mgH\lambda_0}{hc} \sqrt{1 + \frac{m^2c^2\lambda_0^2}{h^2}}} \approx \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2mgH\lambda_0}{hc}}. \quad [\mathbf{1 \, bod}] \quad (36)$$

U unutarnjem korijenu smo zanemarili drugi član koji je puno manji od 1 (ultrarelativistički limit) jer je sami faktor koji množi unutarnji korijen puno manji od 1, pa je to doprinos drugog reda. Za prvi snop ukupna promjena faze ima isti oblik kao i za nerelativistički slučaj ([1 bod]), dok za drugi snop vrijedi:

$$\Delta\phi_2(H) = \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{2mgH\lambda_0}{hc}} \approx \frac{2\pi\Delta l}{\lambda_0} \left(1 - \frac{mgH\lambda_0}{hc}\right). \quad [\mathbf{1 \, bod}] \quad (37)$$

Kao i u nerelativističkom slučaju javlja se konstantni i linearne član u H , te je ukupna promjena faze na intervalu za drugi snop:

$$\phi_2 = \frac{4\pi L}{\lambda_0} - 2\pi \frac{mgL^2 \sin \psi}{hc}, \quad (38)$$

tj. razlika u fazi dva snopa za ultrarelativistički slučaj je:

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{mgL^2 \sin \psi}{hc}. \quad [\mathbf{3 \, boda}] \quad (39)$$

Napomena: Isti rezultat se dobije ako umjesto jednadžbe (35) krenemo s izrazom:

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda} + mgH. \quad (40)$$

c.) Elektron kinetičke energije 400 MeV je ultrarelativistički (energija mirovanja elektrona je 0.511 MeV), pa je razlika u fazi dva snopa dana sa (39). **[2 boda]**

Minimalna udaljenost L se dobije kad je razlika u fazi jednaka π za $\psi = 90^\circ$:

$$\pi = 2\pi \frac{mgL^2 \sin(90^\circ)}{hc} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{hc}{2mg}} = 105.46 \text{ m.} \quad [\mathbf{2 \, boda}] \quad (41)$$

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
8. – 11. svibnja 2023.

Srednje škole – 4. grupa

EKSPERIMENTALNI ZADATAK - RJEŠENJE

Zadatak:

1. Koristeći navedeni pribor pripremite Rumfordov i Riccijev optički fotometar tako da:

- a) definirate osnovni princip rada optičkog fotometra i navedete odgovarajući algebarski izraz; 2 boda

Osvijetljenost neke površine ovisi o jakosti svjetlosnog izvora I , kutu upada svjetlosti na površinu α i udaljenosti svjetlosnog izvora od površine:

$$E = (I \cos \alpha) / r^2 \quad (1)$$

Osvijetljenost površine smanjuje se s kvadratom udaljenosti od izvora svjetlosti.

Fotometri (svjetlomjeri) su instrumenti kojima određujemo osvijetljenost.

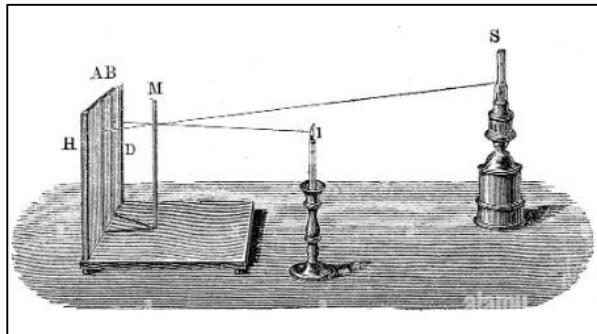
Kod optičkih fotometara uspoređujemo osvijetljenost (rasvetu) na zastoru dobivenu od dva različita izvora svjetlosti. Poznata nam je jakost I_1 jednog od izvora koji je udaljen od ravnine zastora za r_1 i koji daje osvijetljenost E . Želimo li odrediti jakost drugog izvora I_2 , mijenjamo njegovu udaljenost r_2 dok ne dobijemo jednaku osvijetljenost na istoj ravnini.

Uz poznate veličine jakosti jednog izvora i udaljenost oba izvora od zastora, jakost drugog izvora ili omjer jakosti dva nepoznata izvora svjetlosti možemo odrediti prema relaciji:

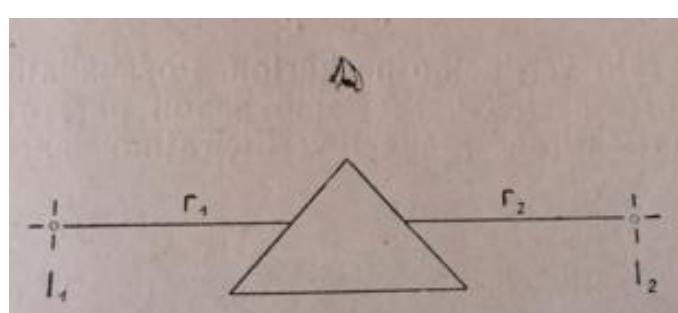
$$I_1 : r_1^2 = I_2 : r_2^2 \quad (2)$$

U fotometriji su razvijene mjerne tehnike uspoređivanja različitih svjetlosnih podražaja koji dolaze do oka i definirane su svjetlosne veličine: jakost izvora svjetlosti I [1cd], svjetlosni tok Φ [1lm] i osvijetljenost E [1lx].

- b) skicom i riječima objasnite sličnosti i razlike Rumfordova i Riccijeva optičkog fotometra; 4 boda



Slika 1. Rumfordov fotometar, povijesni prikaz*



Slika 2. Riccijev fotometar prema stručnoj literaturi**

Sličnosti: oba fotometra rade na istom principu usporedbe dva izvora svjetlosti, prema izrazu (2).

Razlike: kod Rumfordova fotometra na zaslonu uspoređujemo sjene vertikalnog štapa od dva izvora i pomičemo izvore (ili jedan držimo na istoj udaljenosti a drugi pomičemo) dok na zaslonu ne dobijemo jednaku osvijetljenu sjenu; kod Riccijeva fotometra uspoređujemo osvijetljenost ploha prizme kojoj je baza pravokutan istokračan trokut i pomičemo izvore (tj. jedan držimo na istoj udaljenosti a drugi pomičemo) dok ne dobijemo jednaku osvijetljene plohe prizme.

* izvor slike 1.: <https://antikstock.com/product/rumford-photometer-for-the-intensity-of-light/>

**izvor slike 2.: dr. Branimir Marković: Pokusi iz fizike, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb, 1950., str. 57

- c) odredite omjer jakosti dva izvora svjetlosti koji se sastoje od samo jedne lučice; 2 boda

Omjer jakosti dva izvora svjetlosti odredit ćemo primjenom izraza (2):

$$I_1 / I_2 = r_2^2 / r_1^2 \quad (3)$$

Prema izrazima (2) i (3) jasno je da će primjenom oba fotometra za dva ista izvora omjer na bilo kojim udaljenostima biti broj 1.

- d) odredite omjer jakosti dva izvora svjetlosti koji se sastoje od jedne i od dvije lučice; 2 boda

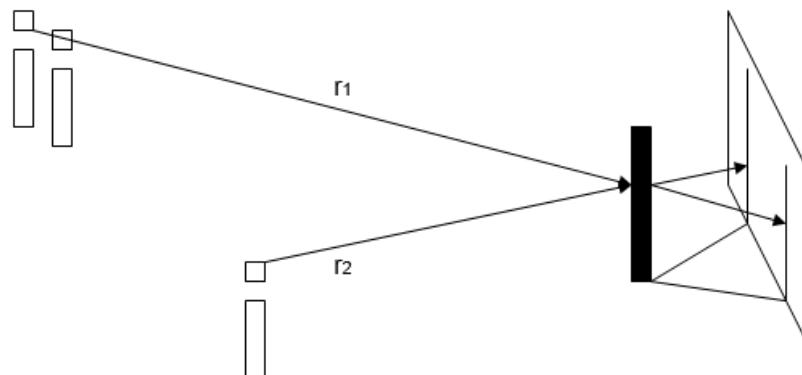
- e) odredite omjer jakosti dva izvora svjetlosti koji se sastoje od jedne i od tri lučice; 2 boda

Zapis srednjih vrijednosti pod h) za oba fotometra i dvije kombinacije izvora svjetlosti donosi po 2 boda za d) i e).

- f) eksperimentalni rad pod c), d) i e) zorno opišite riječima i skicom za oba fotometra; 4 boda

Sastavljanje Rumfordova fotometra (slika 3):

- zastor: bijeli papir selotejpom pričvrstimo za drveno postolje postavljeno okomito;
- predmet za sjenu: tanku bateriju od 1,5 V postaviti okomito na određenu udaljenost od zastora, prethodno određenu pomicanjem jednog ili dva ista izvora svjetlosti – ako je potrebno zbog stabilnosti, za postolje koristiti oblikovani plastelin ili zalijepiti bateriju pomoću otopljenog voska od lučice;
- podloga: bijeli papir na kojem je potrebno, radi lakšeg pozicioniranja lučica, označiti okomicu na zastor i pravce pod istim kutom (umjesto kutomjera koristiti iste stranice pravokutnog trokuta) s presjecištem u središtu predmeta za sjenu;
- izvori svjetlosti: na stranama kutija u kojima su lučice permanentnim markerom označiti dvije crte na istom pravcu koji prolazi kroz središte posudice i zatim lučice postavljati tako da se te crte podudaraju s pravcima nacrtanim na podlozi;
- pomicanjem jednog izvora svjetlosti - lučica namjestimo sjene štapa - baterije na zastoru tako da budu jednakom tamne i zatim izmjerimo udaljenosti (pod d) i e) praktično je dvije, tj. tri lučice postavljene u nizu na pravcu držati na fiksnoj udaljenosti, a pomicati jednu lučicu);
- od kartona pripremiti bočni zaslon kojeg treba postaviti između izvora svjetlosti s dvije ili tri lučice i zastora, tako da njihova svjetlost ne utječe na sjenu od jednog izvora;
- mjeriti udaljenost od središta izvora svjetlosti do štapa koji baca sjenu (slika 3) – potrebno je komentirati kako je to napravljeno za više lučica u nizu;
- omjer jakosti izvora svjetlosti određujemo prema omjeru kvadrata njihovih udaljenosti (relacija 3).



Slika 3. Skica eksperimentalnog seta za Rumfordov fotometar

Sastavljanje Riccijeva fotometra (slika 2):

- savijanjem bijelog papira potrebno je napraviti prizmu i dobiveni oblik učvrstiti selotejpom, tako da nagibi na obje strane prema izvorima svjetlosti – lučicama budu jednaki;
- bijeli papir za podlogu potrebno je pripremiti tako da se na njemu označe pravci međusobno razmaknuti 1 cm i paralelni s obje strane ucrtanih položaja stranica prizme;
- lučice s oznakama na posudicama postavljaju se na pravce i pomiču s jedne strane, što omogućava točnije mjerjenje udaljenosti; dvije i tri lučice mogu biti postavljene na jednu udaljenost koja se zadržava stalnom i zatim je potrebno s druge strane pomicati jednu lučicu dok obje plohe prizme pod kutom ne budu jednakos osvijetljene – tada se od označenog položaja na posudici lučice koji ujedno označava i položaj plamena mjeri udaljenost okomito do plohe prizme (slika 2);
- potrebno je navesti je li pri mjerenu udaljenosti u obzir uzet i nagib na visini plamena lučice ili je mjerjenje vršeno samo do baze prizme.

g) rezultate za minimalno tri mjerena pod c), d) i e) za oba fotometra prikažite tablično;

..... 4 boda

Tablični prikaz treba precizno sadržavati naziv fotometra i na koju se kombinaciju izvora svjetlosti odnosi (u samoj tablici ili u nazivu tablice), redni broj mjerena, te izmjerene udaljenosti r_1 i r_2 . Obzirom na točku h), u istom tabličnom prikazu mogu biti dodani i stupci za relativno odstupanje od srednje vrijednosti i omjer intenziteta.

Primjer jednostavne tablice:

Fotometar / Kombinacija	Redni broj mjerena	r_1 / cm	r_2 / cm	I_1/I_2	$(d_i - \bar{d})/ cm$
	1.				
	2.				
	3.				

h) provedite račun pogreške koji uključuje određivanje srednje vrijednosti, odstupanja pojedinačnih mjerena od srednje vrijednosti, apsolutne vrijednosti maksimalnog odstupanja, relativne maksimalne pogreške i zapis točnog rezultata; 4 boda

$$\text{Određivanje srednje vrijednosti: } \bar{d} = \sum d_i / n, \quad n - \text{broj mjerena} \quad (4)$$

$$\text{Apsolutna vrijednost maksimalnog pojedinačnog odstupanja: } |\Delta d_{\max}| \quad (5)$$

$$\text{Relativna maksimalna pogreška: } r_m = [(|\Delta d_{\max}| / \bar{d}) \cdot 100] \% \quad (6)$$

$$\text{Zapis točnog rezultata: } d = (\bar{d} \pm \Delta d_{\max}) m \quad (7)$$

Napomena: $d \sim r_1$, tj. $r_2 \sim$ račun pogreške odnosi se na onu udaljenost koja je tijekom mjerena bila varijabilna, ako je jedan od izvora svjetlosti ostavljen na istom položaju.

i) komentirajte dobivene relativne maksimalne pogreške; 1 bod

Potrebno je na jednom mjestu sumirati sve dobivene r_m i kratko komentirati njihove vrijednosti – jesu li kod nekih mjerena rezultati točniji nego kod drugih i slično, odgovor pod i) može se povezati s odgovorom pod k).

j) usporedite teorijske vrijednosti prema algebarskom izrazu pod a) s eksperimentalnim vrijednostima u tablicama pod g); 2 boda

Primjenom izraza (3) jednostavno je izračunati omjere za dva i tri jednak izvora, jer ovise o kvadratima udaljenosti – zatim je potrebno kratko usporediti vrijednosti koje su

dobivene u mjerjenjima i iskazati odstupanja, što je ponovno dobro povezati s odgovorom pod k).

- k) prema stečenom eksperimentalnom iskustvu ukratko navedite što sve utječe na preciznost mjerena; 1 bod

Pravilno postavljanje lučica u određeni položaj i određivanje udaljenosti od početka posudice do njezine sredine gdje je plamen najviše utječe na mjerjenje udaljenosti, čemu pomažu oznake na posudama lučica i oznake na podlogama za oba fotometra.

Na preciznost mjerjenja utječe i pravilno postavljanje zaslona tako da izvori dnevne svjetlosti u učionici imaju jednak utjecaj, a dodatni zaslon od kartona onemogućava da svjetlost drugih lučica u nizu umanji jačinu sjene kod Rumfordova fotometra.

- l) odredite koliko biste ukupno kombinacija izvora svjetlosti mogli eksperimentalno provjeriti s dobivenim priborom? 1 bod

Ako na raspolaganju imamo 8 lučica (svijeća), možemo uspoređivati jednu svijeću kao izvor svjetlosti s dvije, odnosno tri, četiri i sve do 7 svijeća, a također i dvije svijeće kao jedan izvor svjetlosti s tri, četiri i pet svijeća i tako dalje. Potrebno je dokazati i jednake udaljenosti za dva izvora od istog broja svijeća: po jedna, tj. po dvije, tri ili četiri svijeće u izvoru. Pri svim ovim kombinacijama treba uzeti u obzir veličinu postolja lučica, što će sigurno utjecati na mogućnosti postavljanja eksperimentalnog seta i na realan broj lučica koje je moguće koristiti.

- m) objasnite na koji biste način odredili jakost jedne lučice ako je drugi izvor žarulja poznatih vrijednosti otpora i napona. 1 bod

Prema izrazu (2) jakost nepoznatog izvora određuje se preciznim mjerjenjem udaljenosti:
$$I_1 = I_2 (r_1 : r_2)^2 \quad (8)$$

Obzirom da svijeća predstavlja svjetlosni izvor jakosti od približno jedne kandele (jedna kandela je definirana kao svjetlosna jakost izvora koji emitira svjetlost valne duljine 555 nm i kojemu je snaga po jediničnom prostornom kutu 1/683 W), prema zadanim parametrima moguće je izravno prema relaciji (8) odrediti svjetlosnu jakost žarulje, a snagu žarulje primjenom Ohmova zakona prema poznatim vrijednostima napona i otpora.

Ukupno: 30 bodova