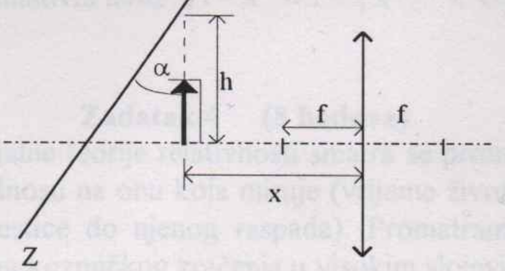
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ FIZIKE '98 - 4. grupa

Zadatak 1 (11 bodova)

Na optičkoj klupi nalazi se tanka konvergentna leća žarišne duljine f=5cm i ravno zrcalo nagnuto pod određenim kutem u odnosu na optičku os. Između zrcala i leće postavljen je svijetli uspravni predmet visine y=3cm na udaljenosti x=10cm od leće. Uspravna os predmeta probada ravninu zrcala pod kutem α na visini h=8cm od optičke osi. Predmet je zacrnjen sa strane okrenute k leći (leća ne stvara njegovu sliku direktno). Realna slika, koju stvara leća, nagnuta je za kut β u odnosu na optičku os. Odredi ovisnost kuta β o kutu 2α uz pretpostavku da je predmet izvan žarišne duljine leće i da ne ometa prolazak svjetlosnih zraka od zrcala do leće, a zatim izračunaj kut β posebno za α=15°.



(Uputa: Kut β definiraj u intervalu [0,90°].)

Zadatak 2 (9 bodova)

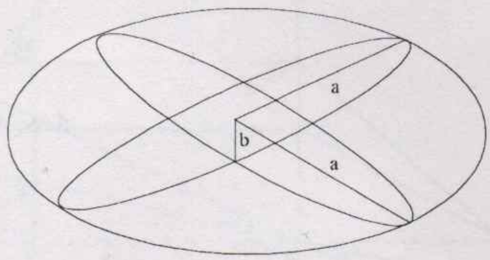
Atmosfera neke nepoznate planete sastoji se od 2 sloja koji imaju oštre granice (slojevi čine dvije koncentrične kugle). Unutrašnji sloj označimo s "1" a vanjski s "2". Udaljenost od središta planete do granice slojeva 1-2 iznosi R=10000km, a debljina sloja 2 je h=2000km. Svemirska sonda, kojom ispitujemo planetu, "zaroni" u sloj 1 do dubine L=500km od granice 1-2. Sonda emitira u svemir usmjereni radio signal valne duljine λ=0.1mm pod kutem α spram vertikale na površinu planete. Indeks loma atmosfere ovisi o valnoj duljini signala te u sloju 1 iznosi $n_1 = \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{A_1^2}}$, a u sloju 2 je $n_2 = \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{A_2^2}}$, gdje su $A_1=6.19\cdot10^{-5}$m i $A_2=9.14\cdot10^{-5}$m (vrijedi odnos $n_1>n_2>1$). Odredi najmanji kut α za koji radio signal doživi totalnu refleksiju na granici

a) 1-2

b) sloja 2 sa svemirskim prostorom.

Zadatak 3 (10 bodova)

Newtonova stakla načinjena su od plankonveksne leće položene tjemenom na planparalelnu ploču na kojoj se nalazi sloj tekućine indeksa loma n=1.36 i debljine h=0.1μm (leća je djelomično potopljena u tekućinu). Leća je načinjena rezanjem od elipsoidnog diska (vidi sliku) poluosi a=10m, b=4m, c=a paralelno s poluosima a i c, pa joj je poprečni presjek elipsa poluosi a i b. Na leću, okomito na ravnu stranu, upada paralelan snop monokromatske svjetlosti valne duljine λ=589nm. Odredi izraz za radijuse svijetlih Newtonovih kolobara za svjetlost reflektiranu od zakrivljene plohe leće i od staklene ploče (ta zraka prolazi slojem zraka i slojem tekućine između leće i ploče). U računu uzmi u obzir one kolobare čiji su radijusi mnogo manji od velike poluosi elipse. Posebno izračunaj radijus trećeg svijetlog kolobara.



(Uputa: Koristiti aproksimativni izraz $\sqrt{1-x^2} \approx 1-\frac{1}{2}x^2, \quad x << 1$!)

Zadatak 4 (8 bodova)

Jednim od dokaza specijalne teorije relativnosti smatra se promijenjeno vrijeme života čestice koja se giba u odnosu na onu koja miruje (vrijeme života je vremenski interval od trenutka nastanka čestice do njenog raspada). Promatramo jednu takvu česticu (mion) koja nastane, zbog kozmičkog zračenja u visokim slojevima atmosfere, na visini h=8km u odnosu na površinu Zemlje i giba se prema središtu Zemlje brzinom v=0.998c, gdje je c=299800km/s brzina svjetlosti. Vrijeme života te čestice u mirovanju je $T=2.2\cdot 10^{-6}$s.

a) Koliko je vrijeme života te čestice kada se giba brzinom v?

b) Da li čestica dosegne površinu Zemlje promatrano:

- relativistički
- nerelativistički?

c) Ako se čestica giba po vertikali prema podnožju ukošenog tornja duljine L=100m nagnutog za kut $\alpha=30°$ prema vertikali (u sustavu Zemlje), koliku bi duljinu tornja "vidio" hipotetski promatrač iz sustava čestice?

Zadatak 5 (12 bodova)

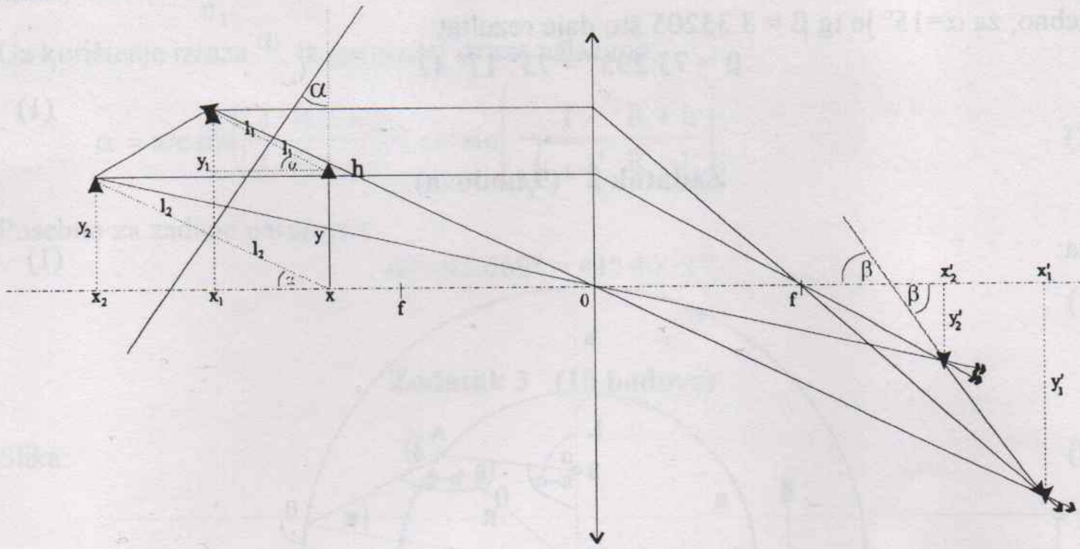
Pri emisiji fotona iz atoma dolazi do pojave odboja atoma (poput trzaja topa koji ispaljuje granatu). Posljedica toga je promijenjena frekvencija emitiranog fotona u odnosu na onu koju bi imao da atom ostane miran nakon emisije. Ako pretpostavimo da je atom mase M u početku mirovao, a zatim prijelazom elektrona između stanja s razlikom energija ΔE emitirao foton, odredi izraz koji opisuje promjenu njegove frekvencije zbog efekta odboja. Pretpostavi da je energija ΔE mnogo manja od energije ekvivalentne masi mirovanja atoma! Nađi posebno za koliko se promijeni frekvencija fotona emitiranog iz atoma vodika pri prijelazu iz prvog pobuđenog u osnovno stanje. Masa atoma vodika je Mc^2=938.767MeV.

(Uputa: Da bi izračunali efekt odboja, treba koristiti relativističke izraze za energiju!)

Rješenja zadataka 4. grupe i smjernice za bodovanje

Zadatak 1 (11 bodova)

Slika: (2)



Sa slike očitavamo:

$l_1 = (h-y)\sin\alpha$

$l_2 = h\sin\alpha$

Odatle slijedi (uz korištenje $2\sin(\alpha)\cos(\alpha)=\sin(2\alpha)$ i $\sin^2(\alpha)={}^1/_2(1-\cos 2\alpha)$):

$x_1 = x + 2l_1\cos\alpha = x + (h-y)\sin 2\alpha$

$x_2 = x + 2l_2\cos\alpha = x + h\sin 2\alpha$

$y_1 = y + 2l_1\sin\alpha = h - (h-y)\cos 2\alpha$

$y_2 = 2l_2\sin\alpha = h(1-\cos 2\alpha)$ (2)

Iz jednadžbi leće $\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{f}$, $\frac{y'}{y}=\frac{x'}{x}$ slijedi $x'=\dfrac{f\cdot x}{x-f}$, $y'=\dfrac{f\cdot y}{x-f}$, te odatle:

$$x'_1 = f\,\frac{x+(h-y)\sin 2\alpha}{x+(h-y)\sin 2\alpha - f}$$

$$x'_2 = f\,\frac{x+h\sin 2\alpha}{x+h\sin 2\alpha - f}$$

$$y'_1 = f\,\frac{h-(h-y)\cos 2\alpha}{x+(h-y)\sin 2\alpha - f}$$ (2)

$$y'_2 = f\,\frac{h(1-\cos 2\alpha)}{x+h\sin 2\alpha - f}$$

Kut β u intervalu [0,90°] naći ćemo iz njegovog tangensa:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \left|\frac{y'_2-y'_1}{x'_2-x'_1}\right|$$

$$=\left|\frac{\dfrac{h(1-\cos 2\alpha)}{x+h\sin 2\alpha - f}-\dfrac{h-(h-y)\cos 2\alpha}{x+(h-y)\sin 2\alpha - f}}{\dfrac{x+h\sin 2\alpha}{x+h\sin 2\alpha - f}-\dfrac{x+(h-y)\sin 2\alpha}{x+(h-y)\sin 2\alpha - f}}\right|$$ (2)

Taj se izraz može reducirati na oblik:

$$\mathrm{tg}\,\beta = \left| \frac{\big(h - (h-y)\cos 2\alpha\big)\big(x + h\sin 2\alpha - f\big) - h(1-\cos 2\alpha)\big(x + (h-y)\sin 2\alpha - f\big)}{f\,y\sin 2\alpha} \right| \qquad (2)$$

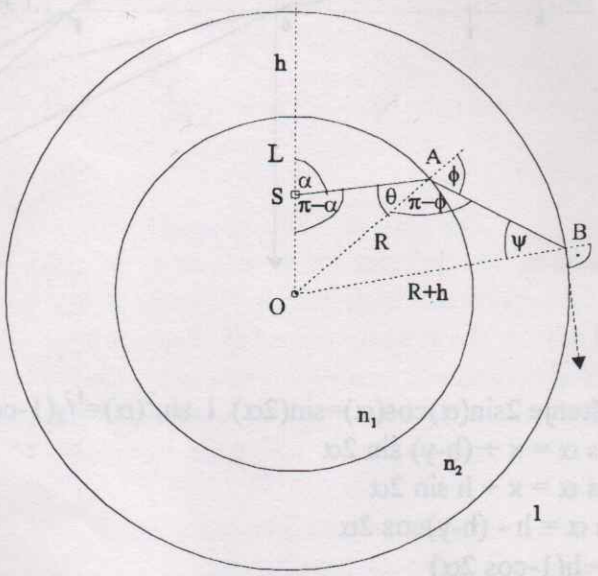
Posebno, za α=15° je tg β = 3.33205 što daje rezultat:

$$\beta = 73.295° = 73°\ 17'\ 42''$$

(1)

Zadatak 2 (9 bodova)

Slika: (1)



a) Sinusov poučak za Δ OSA daje:

$$\sin\theta = \frac{R-L}{R}\sin\alpha \qquad (\S)$$

Totalna refleksija na granici 1-2:

$$\sin\theta = \frac{n_2}{n_1} \qquad (1)$$

Iz gornjih izraza nalazimo:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\frac{R}{R-L}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{A_2^2}}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{A_1^2}}}\frac{R}{R-L}\right) \qquad (2)$$

Posebno za zadane podatke:

$$\alpha = 55.205° = 55°\ 12'\ 18'$$

(1)

b) Sinusov poučak za Δ OAB:

$$\sin\psi = \frac{R}{R+h}\sin\phi$$

Zakon loma na granici 1-2:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\phi} = \frac{n_2}{n_1}$$

Totalna refleksija na granici 2 sa svemirom:

$$\sin\psi = \frac{1}{n_2} \qquad (1)$$

Uz korištenje izraza (§), iz gornja tri izraza nalazimo:

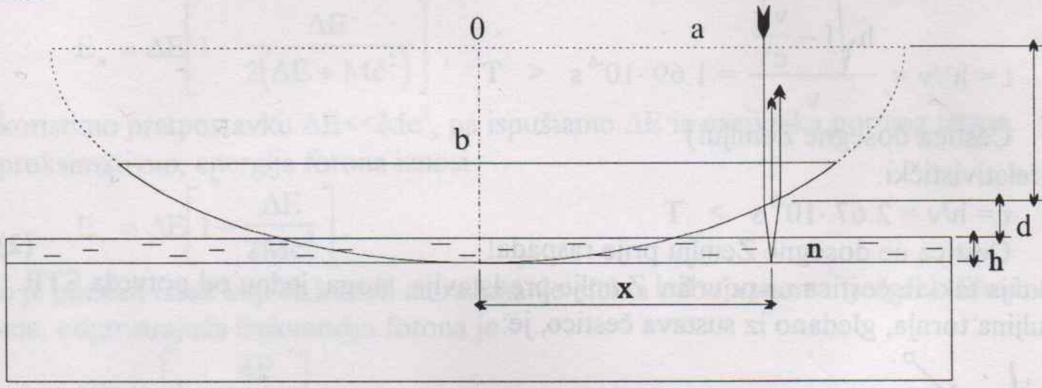
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{n_1}\frac{R+h}{R-L}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{A_1^2}}}\frac{R+h}{R-L}\right) \qquad (2)$$

Posebno za zadane parametre:

$$\alpha = 41.669° = 41°\ 40'\ 7'' \qquad (1)$$

Zadatak 3 (10 bodova)

Slika: (2)



Razlika optičkih puteva na sloju zraka i tekućine između leće i ploče:

$$\delta = 2(d+n\cdot h) + \lambda/2 \qquad (1)$$

Sa slike vidimo da vrijedi odnos:

$$b = y+d+h \qquad (1)$$

Iz jednadžbe elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ nalazimo:

$$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \qquad (1)$$

Na gornji izraz primjenjujemo aproksimaciju za kolobare malih radijusa ($x \ll a$):

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \approx 1-\frac{x^2}{2a^2} \qquad (1)$$

Iz gornja tri izraza slijedi:

$$d \approx \frac{b}{2a^2}x^2 - h\ ,$$

a odatle je izraz za razliku optičkih puteva:

$$\delta \approx \frac{b}{a^2}x^2 + 2(n-1)h + \frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Svijetli kolobari nastaju za $\delta = k\lambda$, $k=1,2,3,\ldots$ na radijusima

$$x_k = \sqrt{\frac{a^2}{b}\left[(2k-1)\frac{\lambda}{2} - 2(n-1)h\right]} \qquad (2)$$

Posebno, radijus trećeg (k=3) kolobara je:

$$x_3 = 5.92\ \text{mm} \qquad (1)$$

Zadatak 4 (8 bodova)

a) Vrijeme života čestice u sustavu Zemlje je:

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 3.48\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} \qquad (2)$$

b) Vrijeme potrebno da čestica dosegne površinu Zemlje:

- relativistički:

  $t = h/v = 2.67\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} \;<\; T'$

  Čestica dosegne Zemlju prije raspada! (2)

(2. mogućnost: Gledano u sustavu čestice ($T=2.2\cdot 10^{-6}$ s)

$$t = h'/v = \frac{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{v} = 1.69\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \;<\; T$$

Čestica dosegne Zemlju!)

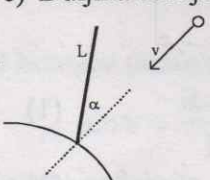
- nerelativistički:

  $t = h/v = 2.67\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} \;>\; T$

  Čestica ne dosegne Zemlju prije raspada! (2)

Detekcija takvih čestica na površini Zemlje predstavlja, stoga, jednu od potvrda STR.

c) Duljina tornja, gledano iz sustava čestice, je:

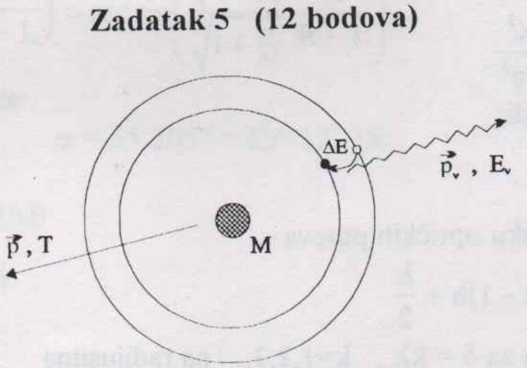


$$L' = \sqrt{\left(L\cos\alpha\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}}\right)^2 + \left(L\sin\alpha\right)^2} \qquad (2)$$

$$= L\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}\cos^2\alpha}$$

$$= 50.3\ \mathrm{m}$$

Zadatak 5 (12 bodova)



Impuls i kinetičku energiju atoma označimo s p i T, a impuls i energiju fotona s p_ν i E_ν.

Impuls fotona:

$$p_\nu = h/\lambda = h\nu/c = E_\nu/c \qquad (1)$$

Zakon sačuvanja impulsa:

$$p = p_\nu \qquad (1)$$

Zakon sačuvanja energije:

$$\Delta E = T + E_\nu \qquad (1)$$

Relativistički izraz za totalnu energiju atoma:

$$\sqrt{p^2c^2 + M^2c^4} = T + Mc^2 \qquad (1)$$

Kombiniranjem gornja četiri izraza dobivamo:

$$\Delta E + Mc^2 - E_\nu = \sqrt{E_\nu^2 + M^2c^4} \qquad (1)$$

Kvadriranjem tog izraza te njegovim reduciranjem dobivamo:

$$E_\nu = \Delta E \frac{\Delta E + 2Mc^2}{2\left(\Delta E + Mc^2\right)} \qquad (2)$$

U brojniku gornjeg izraza dodamo i oduzmemo ΔE te pogodnim grupiranjem dobivamo:

$$E_\nu = \Delta E\left[1 - \frac{\Delta E}{2\left(\Delta E + Mc^2\right)}\right] \qquad (1)$$

Iskoristimo pretpostavku $\Delta E \ll Mc^2$, pa ispuštamo ΔE iz nazivnika gornjeg izraza. Aproksimativno, energija fotona iznosi

$$E_\nu = \Delta E\left[1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right], \qquad (2)$$

što je poznati izraz koji se koristi za računanje efekta odboja atoma (jezgre). Shodno tome, odgovarajuća frekvencija fotona je

$$\nu = \nu_0\left[1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right], \qquad (1)$$

gdje je $\nu_0 = \Delta E/h$.

Razlika energija pri prijelazu elektrona između stanja n=2 u n=1 vodikovog atoma je ΔE=10.2eV, a odgovarajuća promjena frekvencije emitiranog fotona zbog odboja je:

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{\Delta E}{2Mc^2} = \frac{\Delta E^2}{2Mc^2h} = 1.34\cdot 10^7 \text{ Hz}. \qquad (1)$$