ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994.

I. razred

1. Nad hipotenuzom $\overline{AB}$ i katetama $\overline{BC}, \overline{CA}$ pravokutnog trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane kvadrati $ABDE, BCFG, CAHK$. Neka je L sjecište pravaca FG i HK i neka su M, N, P točke simetrične točkama G, H, L s obzirom na pravac AB. Dokažite da točke D, E, C leže na pravcima MP, NP, LP i da su trokuti $ABC, CLK, LCF, AEN, EDP, DBM$ sukladni. Iscrtkajte te trokute! U kojem su odnosu peterokuti $ABGLH$ i $ABMPN$? Što zaključujete promatranjem neiscrtkanih dijelova tih peterokuta?

2. Što se može zaključiti o brojevima a^2, b^2, c^2 ako vrijedi jednakost $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}$?

3. Pokažite da se razlomak $\frac{n^2-n+2}{n^3+2n^2-n+1}$ ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbf{N}$.

4. Za $a \in \mathbf{R}$ riješite sustav jednadžbi

$$x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_2$$
$$x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_n$$
$$x_n^2 + ax_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_1.$$

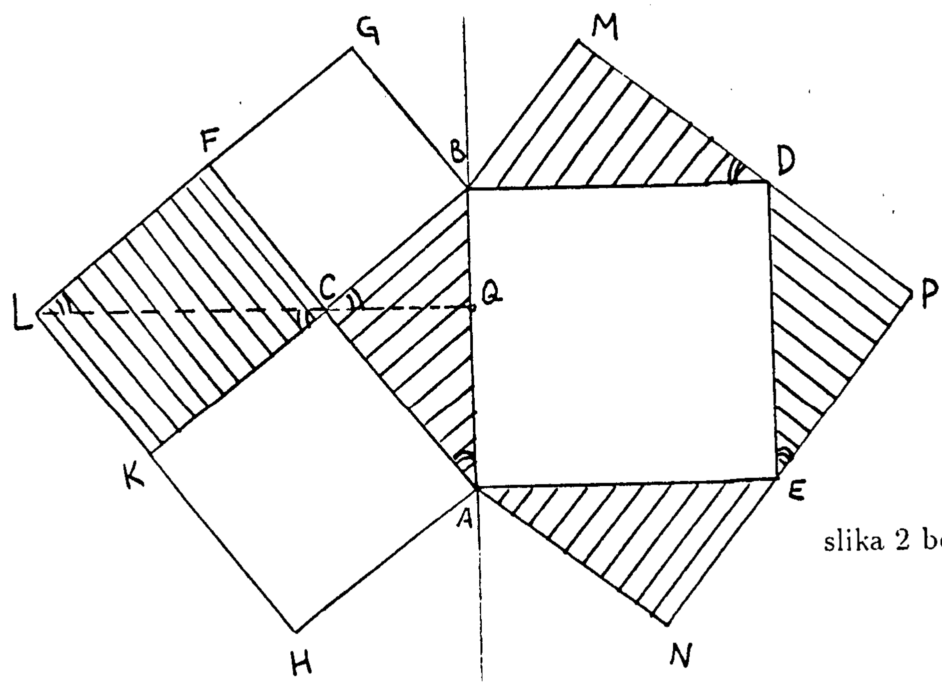
Rješenja zadataka za prvi razred:

1. Iz $|AC| = |AH| = |AN|, |AB| = |AE|, \angle BAC + 90^\circ = \angle BAH = \angle BAN = 90^\circ + \angle EAN$, tj. $\angle BAC = \angle EAN$ slijedi $\triangle ABC \equiv \triangle AEN$. Slično je $\triangle ABC \equiv \triangle DBM$. Iz $NE \perp NA, HK \perp HA$ slijedi da simetrija s obzirom na pravac AB preslikava pravac HL u pravac NE, a kako preslikava L u P, to P leži na pravcu NE. Slično P leži na pravcu MD. 6 bodova

   Iz $|AB| = |ED|, \angle BAC = \angle EAN = 90^\circ - \angle AEN = \angle DEP$ i slično $\angle ABC = \angle EDP$ slijedi $\triangle ABC \equiv \triangle EDP$. 6 bodova

   Iz $|AC| = |CK| = |FL|, |BC| = |CF| = |LK|, \angle ACB = 90^\circ = \angle CFL = \angle CKL$ slijedi $\triangle ABC \equiv \triangle CLK \equiv \triangle LCF$. Neka je $|CQ|$ visina trokuta ABC iz vrha C. Iz $\angle LCK = \angle BAC = \angle BCQ$ slijedi da točke L, C, Q leže na jednom pravcu, tj. $LC \perp AB$. Kako je i $LP \perp AB$, to su točke L, C, P na jednom pravcu. 6 bodova

   Peterokuti $ABGLH$ i $ABMPN$ su sukladni. Slijedi: površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama. 5 bodova



slika 2 boda

2. Iz dane jednakosti dobivamo

$\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)} = \frac{2}{a+c}$

odakle nakon sređivanja $a^2 + c^2 = 2b^2$. 25 bodova

3. Ovaj razlomak možemo zapisati ovako

$\frac{n^3+2n^2-n+1}{n^2-n+2} = \frac{n(n^2-n+2)+3(n^2-n+2)-5}{n^2-n+2} =$

$= n + 3 - \frac{5}{n^2-n+2}$. 5 bodova

Dakle, razlomak se može skratiti ako i samo ako se može skratiti $\frac{n^2-n+2}{5}$

tj. ako i samo ako $5|n^2 - n + 2$. 5 bodova

No,

$n \equiv 0 (\text{mod } 5) \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 2 \equiv 2 (\text{mod } 5)$

$n \equiv 1 (\text{mod } 5) \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 2 \equiv 2 (\text{mod } 5)$

$n \equiv 2 (\text{mod } 5) \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 2 \equiv 4 (\text{mod } 5)$

$n \equiv 3 (\text{mod } 5) \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 2 \equiv 3 (\text{mod } 5)$

$n \equiv 4 (\text{mod } 5) \quad \Rightarrow \quad n^2 - n + 2 \equiv 4 (\text{mod } 5)$ 10 bodova

odakle vidimo da 5 ne dijeli $n^2 - n + 2$ ni za koji prirodan broj n.

5 bodova

4. Zbrajanjem ovih jednadžbi i zgodnim grupiranjem dobiva se

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + (a-1)x_i + (\frac{a-1}{2})^2) = 0$$

15 bodova

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{a-1}{2})^2 = 0.$$

5 bodova

Odavde se vidi da je $x_i - \frac{a-1}{2} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Rješenje je $x_i = \frac{a-1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$. 5 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994.

II. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{\ddots\,\cfrac{\vdots}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}=1$$

   u kojoj ima 1994 razlomačke crte.

2. Iz vrha A paralelograma $ABCD$ spuštene su okomice AM i AN na pravce BC i CD. Dokažite da su trokuti ABC i MAN slični.

3. Odredite sve korijene polinoma

   $P(z) = 2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i, \quad z \in \mathbb{C}$

   znajući da je bar jedan od njih realan.

4. Za koje $a \in \mathbf{R}$ su sva rješenja jednadžbe

   $x(x-1)(x-2)(x-3) = a$

   realna?

Rješenja zadataka za drugi razred:

1. Vrijedi $\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} = \sqrt{x+1} - 1$, 10 bodova

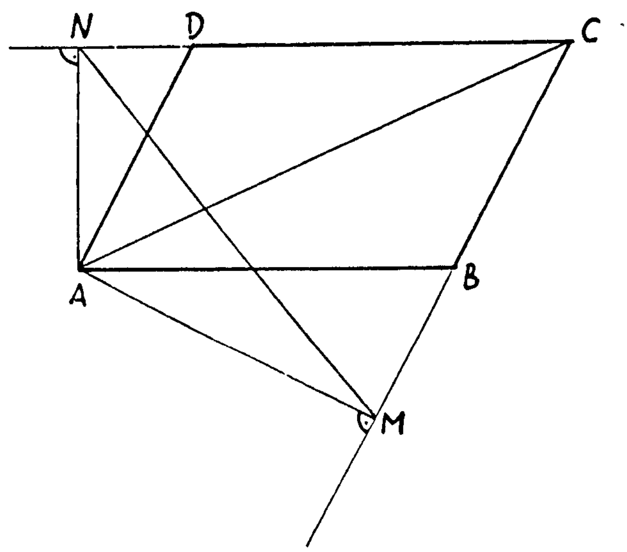
pa tu jednakost primijenimo 1994 puta u jednadžbi. Na kraju imamo $\sqrt{x+1} - 1 = 1$, odakle dobijemo $x = 3$. 15 bodova

2. Četverokut $AMCN$ je tetivni jer su $\angle AMC$ i $\angle ANC$ pravi. 10 bodova

Slijedi da je $\angle MAN = 180^\circ - \angle MCN$ (kutovi tetivnog četverokuta) i $\angle ABC = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle MCN$ odakle je $\angle MAN = \angle ABC$.
5 bodova

Također je $\angle ANM = \angle ACM = \angle ACB$ (obodni kutovi nad tetivom).
5 bodova

I preostali treći kutovi iz trokuta MAN i trokuta ABC moraju biti sukladni pa je $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.
5 bodova



3. Napišimo polinom u obliku

$P(z) = (2z^3 - 5z^2 + 1) + i(-6z^2 + 9z - 3)$.

Neka je $z_1 \in \mathbf{R}$ takav da je $P(z_1) = 0$. Tada je

$2z_1^3 - 5z_1^2 + 1 = 0$ i $-6z_1^2 + 9z_1 - 3 = 0$. 5 bodova

Rješenja druge jednadžbe su $\frac{1}{2}$ i 1 od kojih samo $\frac{1}{2}$ zadovoljava i prvu jednadžbu. Dakle, $z_1 = \frac{1}{2}$. 5 bodova

Iz $(2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i) : (z - \frac{1}{2}) = 2z^2 - (4+6i)z - 2 + 6i$
10 bodova

i iz $2z^2 - (4+6i)z - 2 + 6i = 0$ slijedi $z_2 = 1 + 2i, z_3 = 1 + i$.
5 bodova

4. Stavimo $u = x - \frac{3}{2}$. Dobivamo

$(u + \frac{3}{2})(u + \frac{1}{2})(u - \frac{1}{2})(u - \frac{3}{2}) = a$ odakle se dobiva

$(u^2 - \frac{9}{4})(u^2 - \frac{1}{4}) = a$. 5 bodova

Neka je $y = u^2$. Problem je ekvivalentan sa određivanjem brojeva $a \in \mathbf{R}$ takvih da su oba rješenja jednadžbe $(y - \frac{9}{4})(y - \frac{1}{4}) = a$ realna i pozitivna.
10 bodova

Jednadžba se svodi na sljedeću: $y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{9}{16} - a = 0$. Njezina rješenja će biti realna ako je $D = \frac{25}{4} - 4 \cdot (\frac{9}{16} - a) \geq 0$ tj. ako je $a \geq -1$.

Rješenja ove jednadžbe bit će pozitivna ako je $\frac{9}{16} - a \geq 0$, tj. ako je $a \leq \frac{9}{16}$. 5 bodova

Dakle, za $a \in [-1, \frac{9}{16}]$ sva četiri rješenja jednadžbe bit će realna.
5 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1.$$

2. Kugla je opisana oko uspravnog stošca. Ravnina koja prolazi središtem te kugle, a paralelna je s bazom stošca, dijeli stožac na dva dijela jednakih volumena. Koliki je kut između izvodnice stošca i ravnine njegove baze?

3. Za $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ izrazite broj $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ pomoću brojeva $a = \sin\alpha + \sin\beta$ i $b = \cos\alpha + \cos\beta$.

4. Za koje $m \in \mathbf{R}$ jednadžba

   $\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = m$

   ima rješenje?

Rješenja zadataka za treći razred

1. Moramo promatrati dva slučaja:

   (a) $3-x>1$ i $\frac{3x-5}{3-x}<0$;

   (b) $0<3-x<1$ i $\frac{3x-5}{3-x}>0$. 5 bodova

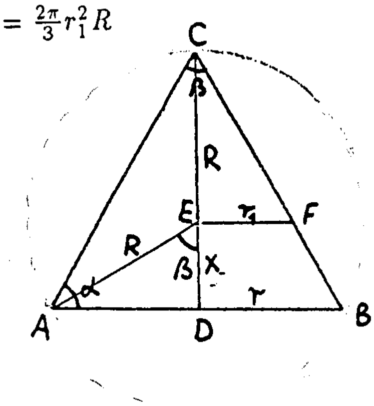
   Odavde dobivamo

   (a) $x<2$ i $3x-5<0$, tj. $x\in(-\infty,\frac{5}{3})$; 8 bodova

   (b) $2<x<3$ i $3x-5>0$, tj. $x\in(2,3)$. 8 bodova

   Stoga je rješenje $x\in(-\infty,\frac{5}{3})\cup(2,3)$. 4 boda

2. Ako je V volumen stošca, a V_1 volumen njegovog gornjeg dijela tada je $\frac{\pi}{3}r^2(R+x)=\frac{2\pi}{3}r_1^2R$ 2 boda



$\triangle DBC\sim\triangle EFC \quad\Rightarrow\quad \frac{r_1}{r}=\frac{R}{R+x}$. 5 bodova

Odavde je $r_1=r\cdot\frac{R}{R+x}$, pa uvrštavanjem u prvu jednakost dobivamo

$r^2(R+x)=2r^2\cdot\frac{R^2}{(R+x)^2}\cdot R \quad\Rightarrow\quad (R+x)^3=2R^3$

$\Rightarrow\quad R+x=R\sqrt[3]{2} \quad\Rightarrow\quad x=R(\sqrt[3]{2}-1)$. 10 bodova

Iz trokuta ADE imamo $\quad\cos\beta=\frac{x}{R}=\sqrt[3]{2}-1,\quad(\beta\approx 74°56')$. 4 boda

Iz trokuta ABC imamo $\quad\alpha=90°-\frac{\beta}{2}\quad(\approx 52°32')$. 4 boda

3. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$ 5 bodova

Iz $a^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$ i $b^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta$

zbrajanjem dobivamo $\cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2+b^2-2}{2}$. 5 bodova

Nadalje, $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\alpha-\beta)+1}{2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$,

$b = \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

odakle dobivamo $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i 5 bodova

$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2})$

$\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) = \frac{a^2+b^2+2b}{4\sqrt{a^2+b^2}}$. 5 bodova

I napokon se dobiva $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{4a}{a^2+b^2+2b}$. 5 bodova

4. Jednadžbu možemo ovako zapisati

$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = m(\sin^2 x + \cos^2 x)$

$(1-m)\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - (m+2)\cos^2 x = 0.$ 5 bodova

Promatrajmo sada dva slučaja.

(a) Za $m \neq 1$ je $\cos x \neq 0$, pa jednadžbu podijelimo sa $\cos^2 x$. Dobivamo

$(1-m)\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - (m+2) = 0.$ 5 bodova

Za $t = \operatorname{tg} x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $(1-m)t^2 - t - (m+2) = 0$.

Da bi ona imala realna rješenja nužno je i dovoljno da za njezinu diskriminantu vrijedi: $D \geq 0$.

$D = 1 + 4(1-m)(m+2) = -4m^2 - 4m + 9.$

Dakle, $-4m^2 - 4m + 9 \geq 0$ 5 bodova

$m \in [\frac{-1-\sqrt{10}}{2}, \frac{-1+\sqrt{10}}{2}]\backslash\{1\}$. 5 bodova

(b) Za $m = 1$ imamo jednadžbu $-\cos x \cdot (\sin x + 3\cos x) = 0$ koja ima rješenja, npr. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. 5 bodova

Prema tome, jednadžba ima rješenja za $m \in [\frac{-1-\sqrt{10}}{2}, \frac{-1+\sqrt{10}}{2}]$.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994.

IV. razred

1. Dokažite da za različite točke A, B, C i D na jednakostraničnoj hiperboli iz $AB \perp CD$ slijedi $AC \perp BD$ i $AD \perp BC$.

2. Odredite brojeve $a_1, a_2, \ldots$ ako je $a_1 = 1, a_2 = 2$ i
$a_n = (2n+1)a_{n-1} - (n^2-1)a_{n-2}, \quad (n \geq 3)$.

3. Ako je $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ parna fukcija i ako je za $c > 0$ funkcija $g(x) = f(x-c)$ neparna, dokažite da je f periodička funkcija s periodom $4c$.

4. Na šahovskom turniru s 8 sudionika svaka dvojica odigrala su po jednu partiju. Nakon odigrane partije pobjednik dobiva 1 bod, a poraženi 0 bodova. Ako partija završi remisom svaki od njih dobiva po $\frac{1}{2}$ boda. Na kraju turnira svaka dva sudionika imaju različit broj bodova, a drugoplasirani šahist ima toliko bodova koliko ih imaju posljednja četvorica zajedno. Koliko je bodova osvojio sedmoplasirani igrač u partiji s trećeplasiranim?

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Neka je jednadžba hiperbole $x \cdot y = m^2$, 10 bodova

   a odabrane točke $A = (ma, \frac{m}{a}), B = (mb, \frac{m}{b}), C = (mc, \frac{m}{c})$,

   $D = (md, \frac{m}{d})$. 5 bodova

   Tada je $AB \perp CD$ ako i samo ako je

   $\frac{\frac{m}{b} - \frac{m}{a}}{mb - ma} \cdot \frac{\frac{m}{d} - \frac{m}{c}}{md - mc} = -1$,

   odakle dobivamo $abcd = -1$. 5 bodova

   Zbog simetrije iz $abcd = -1$ slijedi da je $AC \perp BD$ i $AD \perp BC$.
   5 bodova

2. Izračunajmo nekoliko prvih članova:

   $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 24, a_5 = 120, a_6 = 720, \ldots$ Primjećujemo da je

   $a_1 = 1!, a_2 = 2!, a_3 = 3!, a_4 = 4!, a_5 = 5!, a_6 = 6!, \ldots$ 5 bodova

   Pretpostavljamo da je $a_n = n!$. Našu slutnju ćemo provjeriti koristeći metodu matematičke indukcije. 5 bodova

   (a) Za $n = 1$ je $a_1 = 1!$, a za $n = 2$ je $a_2 = 2!$. 2 boda

   (b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve $k < n$ za neko $n > 2$, tj. da je $a_{n-2} = (n-2)!$ i $a_{n-1} = (n-1)!$. 5 bodova

   Tada je

   $a_n = (2n+1)a_{n-1} - (n^2-1)a_{n-2} =$
   $(2n+1)(n-1)! - (n^2-1)(n-2)! =$
   $= (n-2)!(2n^2 - n - 1) - (n^2-1)(n-2)! = n!$.

   Zato je za svako $n \in \mathbb{N}$ $a_n = n!$. 8 bodova

3. Izračunajmo koliko je $f(x - 4c)$. 5 bodova

$f(x - 4c) = g(x - 3c) =$ (zbog neparnosti funkcije g)

$= -g(3c - x) =$ 5 bodova

$= -f(2c - x) =$ (zbog parnosti funkcije f)

$= -f(x - 2c) =$ 5 bodova

$= -g(x - c) =$ (zbog neparnosti funkcije g)

$= g(c - x) =$ 5 bodova

$= f(-x) =$ (zbog parnosti funkcije f)

$= f(x)$. 5 bodova

4. Posljednja četvorica imaju zajedno barem 6 bodova zato što su oni međusobno odigrali 6 partija, a svaka donosi jedan bod. 7 bodova

Drugoplasirani igrač ima najviše 6 bodova. Naime, ako prvoplasirani ima 7 bodova, tada je on pobijedio drugoplasiranog. Ako prvoplasirani ima 6,5 bodova (ili manje), onda drugoplasirani ima najviše 6 bodova jer svaka dva imaju različit broj bodova. 8 bodova

Drugoplasirani igrač ima barem 6 bodova jer su barem toliko osvojila posljednja četvorica. Zato on ima točno 6 bodova i toliko su osvojila posljednja četvorica. 5 bodova

Dakle, oni su izgubili sve partije u susretima s prvom četvoricom, tj. sedmoplasirani igrač je izgubio od trećeplasiranog. 5 bodova