

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994.

I. razred

1. Nad hipotenuzom \overline{AB} i katetama $\overline{BC}, \overline{CA}$ pravokutnog trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane kvadrati $ABDE, BCFG, CAHK$. Neka je L sjecište pravaca FG i HK i neka su M, N, P točke simetrične točkama G, H, L s obzirom na pravac AB . Dokažite da točke D, E, C leže na pravcima MP, NP, LP i da su trokuti $ABC, CLK, LCF, AEN, EDP, DBM$ sukladni. Iscrtkajte te trokute! U kojem su odnosu peterokuti $ABGLH$ i $ABMPN$? Što zaključujete promatranjem neiscrtanih dijelova tih peterokuta?
2. Što se može zaključiti o brojevima a^2, b^2, c^2 ako vrijedi jednakost
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}?$$
3. Pokažite da se razlomak $\frac{n^2-n+2}{n^3+2n^2-n+1}$ ne može skratiti ni za koji $n \in \mathbf{N}$.
4. Za $a \in \mathbf{R}$ riješite sustav jednačbi
$$x_1^2 + ax_1 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_2$$
$$x_2^2 + ax_2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_3$$
$$\dots \dots \dots$$
$$x_{n-1}^2 + ax_{n-1} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_n$$
$$x_n^2 + ax_n + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = x_1.$$

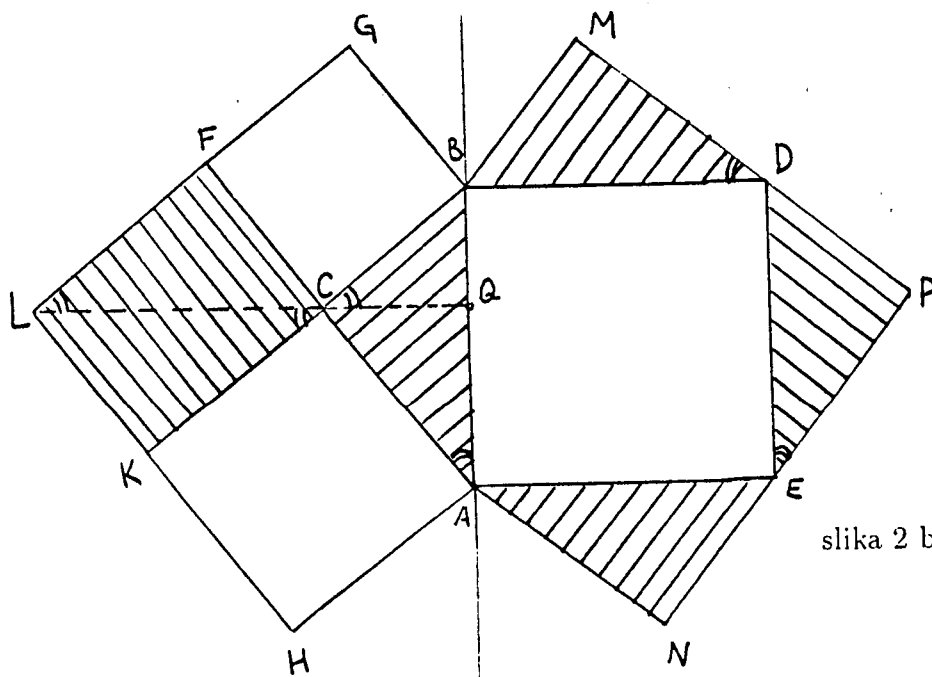
Rješenja zadataka za prvi razred:

1. Iz $|AC| = |AH| = |AN|$, $|AB| = |AE|$, $\angle BAC + 90^\circ = \angle BAH = \angle BAN = 90^\circ + \angle EAN$, tj. $\angle BAC = \angle EAN$ slijedi $\triangle ABC \equiv \triangle AEN$. Slično je $\triangle ABC \equiv \triangle DBM$. Iz $NE \perp NA$, $HK \perp HA$ slijedi da simetrija s obzirom na pravac AB preslikava pravac HL u pravac NE , a kako preslikava L u P , to P leži na pravcu NE . Slično P leži na pravcu MD . 6 bodova

Iz $|AB| = |ED|$, $\angle BAC = \angle EAN = 90^\circ - \angle AEN = \angle DEP$ i slično $\angle ABC = \angle EDP$ slijedi $\triangle ABC \equiv \triangle EDP$. 6 bodova

Iz $|AC| = |CK| = |FL|$, $|BC| = |CF| = |LK|$, $\angle ACB = 90^\circ = \angle CFL = \angle CKL$ slijedi $\triangle ABC \equiv \triangle CLK \equiv \triangle LCF$. Neka je $|CQ|$ visina trokuta ABC iz vrha C . Iz $\angle LCK = \angle BAC = \angle BCQ$ slijedi da točke L, C, Q leže na jednom pravcu, tj. $LC \perp AB$. Kako je i $LP \perp AB$, to su točke L, C, P na jednom pravcu. 6 bodova

Peterokuti $ABGLH$ i $ABMPN$ su sukladni. Slijedi: površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama. 5 bodova



slika 2 boda

2. Iz dane jednakosti dobivamo

$$\frac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)} = \frac{2}{a+c}$$

odakle nakon sređivanja $a^2 + c^2 = 2b^2$.

25 bodova

3. Ovaj razlomak možemo zapisati ovako

$$\frac{n^3+2n^2-n+1}{n^2-n+2} = \frac{n(n^2-n+2)+3(n^2-n+2)-5}{n^2-n+2} =$$
$$= n + 3 - \frac{5}{n^2-n+2}.$$

5 bodova

Dakle, razlomak se može skratiti ako i samo ako se može skratiti $\frac{n^2-n+2}{5}$
tj. ako i samo ako $5|n^2 - n + 2$. 5 bodova

No,

$$n \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow n^2 - n + 2 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$n \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow n^2 - n + 2 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$n \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow n^2 - n + 2 \equiv 4 \pmod{5}$$

$$n \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow n^2 - n + 2 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$n \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow n^2 - n + 2 \equiv 4 \pmod{5}$$

10 bodova

odakle vidimo da 5 ne dijeli $n^2 - n + 2$ ni za koji prirodan broj n .

5 bodova

4. Zbrajanjem ovih jednadžbi i zgodnim grupiranjem dobiva se

$$\sum_{i=1}^n (x_i^2 + (a-1)x_i + (\frac{a-1}{2})^2) = 0$$

tj.

15 bodova

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{a-1}{2})^2 = 0.$$

5 bodova

Oдавde se vidi da je $x_i - \frac{a-1}{2} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Rješenje je $x_i = \frac{a-1}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

5 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994.

II. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}}}} = 1$$

u kojoj ima 1994 razlomačke crte.

2. Iz vrha A paralelograma $ABCD$ spuštene su okomice AM i AN na pravce BC i CD . Dokažite da su trokuti ABC i MAN slični.

3. Odredite sve korijene polinoma

$$P(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i, \quad z \in \mathbb{C}$$

znajući da je bar jedan od njih realan.

4. Za koje $a \in \mathbb{R}$ su sva rješenja jednadžbe

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = a$$

realna?

3. Napišimo polinom u obliku

$$P(z) = (2z^3 - 5z^2 + 1) + i(-6z^2 + 9z - 3).$$

Neka je $z_1 \in \mathbf{R}$ takav da je $P(z_1) = 0$. Tada je

$$2z_1^3 - 5z_1^2 + 1 = 0 \quad \text{i} \quad -6z_1^2 + 9z_1 - 3 = 0.$$

5 bodova

Rješenja druge jednadžbe su $\frac{1}{2}$ i 1 od kojih samo $\frac{1}{2}$ zadovoljava i prvu jednadžbu. Dakle, $z_1 = \frac{1}{2}$.

5 bodova

$$\text{Iz } (2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i) : (z - \frac{1}{2}) = 2z^2 - (4 + 6i)z - 2 + 6i$$

10 bodova

i iz $2z^2 - (4 + 6i)z - 2 + 6i = 0$ slijedi $z_2 = 1 + 2i, z_3 = 1 + i$.

5 bodova

4. Stavimo $u = x - \frac{3}{2}$. Dobivamo

$$(u + \frac{3}{2})(u + \frac{1}{2})(u - \frac{1}{2})(u - \frac{3}{2}) = a \quad \text{odakle se dobiva}$$

$$(u^2 - \frac{9}{4})(u^2 - \frac{1}{4}) = a.$$

5 bodova

Neka je $y = u^2$. Problem je ekvivalentan sa određivanjem brojeva $a \in \mathbf{R}$ takvih da su oba rješenja jednadžbe $(y - \frac{9}{4})(y - \frac{1}{4}) = a$ realna i pozitivna.

10 bodova

Jednadžba se svodi na sljedeću: $y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{9}{16} - a = 0$. Njezina rješenja će biti realna ako je $D = \frac{25}{4} - 4 \cdot (\frac{9}{16} - a) \geq 0$ tj. ako je $a \geq -1$.

Rješenja ove jednadžbe bit će pozitivna ako je $\frac{9}{16} - a \geq 0$, tj. ako je $a \leq \frac{9}{16}$.

5 bodova

Dakle, za $a \in [-1, \frac{9}{16}]$ sva četiri rješenja jednadžbe bit će realna.

5 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$(3 - x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1.$$

2. Kugla je opisana oko uspravnog stošca. Ravnina koja prolazi središtem te kugle, a paralelna je s bazom stošca, dijeli stožac na dva dijela jednakih volumena. Koliki je kut između izvodnice stošca i ravnine njegove baze?
3. Za $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ izrazite broj $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ pomoću brojeva $a = \sin \alpha + \sin \beta$ i $b = \cos \alpha + \cos \beta$.
4. Za koje $m \in \mathbb{R}$ jednadžba
$$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = m$$
ima rješenje?

Rješenja zadatka za treći razred

1. Moramo promatrati dva slučaja:

(a) $3 - x > 1$ i $\frac{3x-5}{3-x} < 0$;

(b) $0 < 3 - x < 1$ i $\frac{3x-5}{3-x} > 0$.

5 bodova

Odavde dobivamo

(a) $x < 2$ i $3x - 5 < 0$, tj. $x \in (-\infty, \frac{5}{3})$;

8 bodova

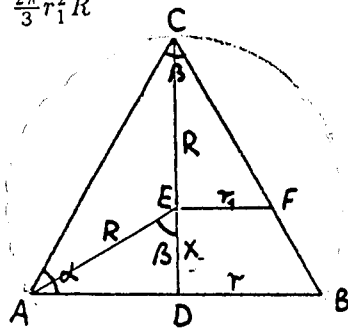
(b) $2 < x < 3$ i $3x - 5 > 0$, tj. $x \in (2, 3)$.

8 bodova

Stoga je rješenje $x \in (-\infty, \frac{5}{3}) \cup (2, 3)$.

4 boda

2. Ako je V volumen stošca, a V_1 volumen njegovog gornjeg dijela tada je
 $\frac{\pi}{3}r^2(R+x) = \frac{2\pi}{3}r_1^2R$ 2 boda



$\triangle DBC \sim \triangle EFC \Rightarrow \frac{r_1}{r} = \frac{R}{R+x}$.

5 bodova

Odavde je $r_1 = r \cdot \frac{R}{R+x}$, pa uvrštavanjem u prvu jednakost dobivamo

$r^2(R+x) = 2r^2 \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2} \cdot R \Rightarrow (R+x)^3 = 2R^3$

$\Rightarrow R+x = R\sqrt[3]{2} \Rightarrow x = R(\sqrt[3]{2} - 1)$.

10 bodova

Iz trokuta ADE imamo $\cos \beta = \frac{x}{R} = \sqrt[3]{2} - 1$, ($\beta \approx 74^\circ 56'$). 4 boda

Iz trokuta ABC imamo $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ ($\approx 52^\circ 32'$). 4 boda

$$3. \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \quad 5 \text{ bodova}$$

$$\text{Iz } a^2 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \text{ i } b^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\text{zbrajanjem dobivamo } \cos(\alpha - \beta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad 5 \text{ bodova}$$

$$\text{Nadalje, } \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\alpha-\beta)+1}{2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2},$$

$$b = \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{odakle dobivamo } \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ i} \quad 5 \text{ bodova}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} (\cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \frac{\alpha+\beta}{2})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) = \frac{a^2+b^2+2b}{4\sqrt{a^2+b^2}}. \quad 5 \text{ bodova}$$

$$\text{I napokon se dobiva } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{4a}{a^2+b^2+2b}. \quad 5 \text{ bodova}$$

4. Jednadžbu možemo ovako zapisati

$$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = m(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$(1 - m) \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - (m + 2) \cos^2 x = 0. \quad 5 \text{ bodova}$$

Promatrajmo sada dva slučaja.

(a) Za $m \neq 1$ je $\cos x \neq 0$, pa jednadžbu podijelimo sa $\cos^2 x$. Dobivamo

$$(1 - m) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - (m + 2) = 0. \quad 5 \text{ bodova}$$

Za $t = \operatorname{tg} x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu $(1 - m)t^2 - t - (m + 2) = 0$.

Da bi ona imala realna rješenja nužno je i dovoljno da za njezinu diskriminantu vrijedi: $D \geq 0$.

$$D = 1 + 4(1 - m)(m + 2) = -4m^2 - 4m + 9.$$

$$\text{Dakle, } -4m^2 - 4m + 9 \geq 0 \quad 5 \text{ bodova}$$

$$m \in \left[\frac{-1-\sqrt{10}}{2}, \frac{-1+\sqrt{10}}{2} \right] \setminus \{1\}. \quad 5 \text{ bodova}$$

(b) Za $m = 1$ imamo jednadžbu $-\cos x \cdot (\sin x + 3 \cos x) = 0$ koja ima rješenja, npr. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. 5 bodova

Prema tome, jednadžba ima rješenja za $m \in \left[\frac{-1-\sqrt{10}}{2}, \frac{-1+\sqrt{10}}{2} \right]$.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA KULTURE I PROSVJETE
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

9. travnja 1994.

IV. razred

1. Dokažite da za različite točke A, B, C i D na jednakostraničnoj hiperboli iz $AB \perp CD$ slijedi $AC \perp BD$ i $AD \perp BC$.
2. Odredite brojeve a_1, a_2, \dots ako je $a_1 = 1, a_2 = 2$ i
$$a_n = (2n + 1)a_{n-1} - (n^2 - 1)a_{n-2}, \quad (n \geq 3).$$
3. Ako je $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ parna funkcija i ako je za $c > 0$ funkcija $g(x) = f(x - c)$ neparna, dokažite da je f periodička funkcija s periodom $4c$.
4. Na šahovskom turniru s 8 sudionika svaka dvojica odigrala su po jednu partiju. Nakon odigrane partije pobjednik dobiva 1 bod, a poraženi 0 bodova. Ako partija završi remisom svaki od njih dobiva po $\frac{1}{2}$ boda. Na kraju turnira svaka dva sudionika imaju različit broj bodova, a drugoplasirani šahist ima toliko bodova koliko ih imaju posljednja četvorica zajedno. Koliko je bodova osvojio sedmoplasirani igrač u partiji s trećeplasiranim?

Rješenja zadataka za 4. razred

1. Neka je jednačba hiperbole $x \cdot y = m^2$, 10 bodova
a odabrane točke $A = (ma, \frac{m}{a})$, $B = (mb, \frac{m}{b})$, $C = (mc, \frac{m}{c})$,
 $D = (md, \frac{m}{d})$. 5 bodova
Tada je $AB \perp CD$ ako i samo ako je
 $\frac{\frac{m}{b} - \frac{m}{a}}{mb - ma} \cdot \frac{\frac{m}{d} - \frac{m}{c}}{md - mc} = -1$,
odakle dobivamo $abcd = -1$. 5 bodova
Zbog simetrije iz $abcd = -1$ slijedi da je $AC \perp BD$ i $AD \perp BC$. 5 bodova

2. Izračunajmo nekoliko prvih članova:

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 24, a_5 = 120, a_6 = 720, \dots$ Primjećujemo da je

$$a_1 = 1!, a_2 = 2!, a_3 = 3!, a_4 = 4!, a_5 = 5!, a_6 = 6!, \dots \quad 5 \text{ bodova}$$

Pretpostavljamo da je $a_n = n!$. Našu slutnju ćemo provjeriti koristeći metodu matematičke indukcije. 5 bodova

(a) Za $n = 1$ je $a_1 = 1!$, a za $n = 2$ je $a_2 = 2!$. 2 boda

(b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve $k < n$ za neko $n > 2$, tj. da je $a_{n-2} = (n-2)!$ i $a_{n-1} = (n-1)!$. 5 bodova

Tada je

$$\begin{aligned} a_n &= (2n+1)a_{n-1} - (n^2-1)a_{n-2} = \\ &= (2n+1)(n-1)! - (n^2-1)(n-2)! = \\ &= (n-2)!(2n^2 - n - 1) - (n^2-1)(n-2)! = n!. \end{aligned}$$

Zato je za svako $n \in \mathbb{N}$ $a_n = n!$. 8 bodova

3. Izračunajmo koliko je $f(x - 4c)$. 5 bodova

$$f(x - 4c) = g(x - 3c) = \quad (\text{zbog neparnosti funkcije } g)$$

$$= -g(3c - x) = \quad \text{5 bodova}$$

$$= -f(2c - x) = \quad (\text{zbog parnosti funkcije } f)$$

$$= -f(x - 2c) = \quad \text{5 bodova}$$

$$= -g(x - c) = \quad (\text{zbog neparnosti funkcije } g)$$

$$= g(c - x) = \quad \text{5 bodova}$$

$$= f(-x) = \quad (\text{zbog parnosti funkcije } f)$$

$$= f(x). \quad \text{5 bodova}$$

4. Posljednja četvorica imaju zajedno barem 6 bodova zato što su oni međusobno odigrali 6 partija, a svaka donosi jedan bod. 7 bodova

Drugoplasirani igrač ima najviše 6 bodova. Naime, ako prvoplasirani ima 7 bodova, tada je on pobijedio drugoplasiranog. Ako prvoplasirani ima 6,5 bodova (ili manje), onda drugoplasirani ima najviše 6 bodova jer svaka dva imaju različit broj bodova. 8 bodova

Drugoplasirani igrač ima barem 6 bodova jer su barem toliko osvojila posljednja četvorica. Zato on ima točno 6 bodova i toliko su osvojila posljednja četvorica. 5 bodova

Dakle, oni su izgubili sve partije u susretima s prvom četvoricom, tj. sedmoplasirani igrač je izgubio od trećeplasiranog. 5 bodova