MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Umag, 11. – 14. svibnja 1995. godine

I. razred

1. U pravokutni trokut ABC s duljinom hipotenuze c i pripadnom visinom h upisan je kvadrat $DEFG$ sa dva susjedna vrha D, E na hipotenuzi $\overline{AB}$ i po jednim vrhom F i G na katetama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$. Izračunajte duljinu x stranice tog kvadrata i dokažite jednakost $|AD| \cdot |BE| = x^2$.

2. Dokažite identitet

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)} + \frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)} =$$

$$= \frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)} + \ldots + \frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}.$$

3. Nađite sva realna rješenja jednadžbe

$$\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} - 2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} +$$

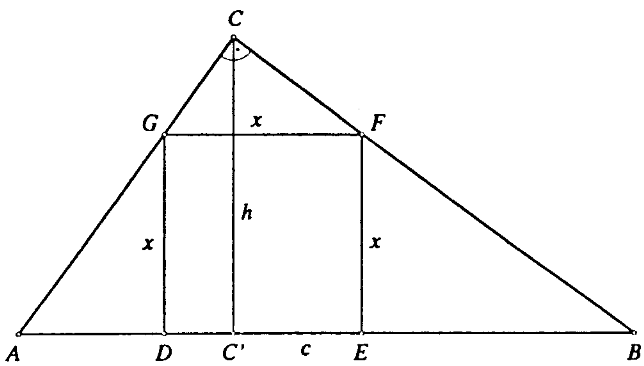
$$+3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}} = 4.$$

4. Dokažite da postoji broj oblika $\overline{\ldots.1995}$ djeljiv sa 1999.

Rješenja za prvi razred

Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Iz jednadžbi $\frac{x}{h} = \frac{|AG|}{|AC|}$, $\frac{x}{c} = \frac{|GC|}{|AC|}$
zbrajanjem dobivamo $\frac{x}{h} + \frac{x}{c} = 1$, tj. dalje $x = \frac{ch}{c+h}$.
Iz jednakosti $\frac{|AD|}{|AC'|} = \frac{x}{h}$, $\frac{|BE|}{|BC'|} = \frac{x}{h}$
množenjem slijedi $\frac{|AD|\cdot|BE|}{|AC'|\cdot|BC'|} = \frac{x^2}{h^2}$, tj.
$|AD| \cdot |BE| = x^2$, jer je $|AC'| \cdot |BC'| = h^2$.



2. Lijeva strana je jednaka

$$\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2 + a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n + a_1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 + a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_2 + a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n + a_1}\right)$$

što je jednako desnoj strani.

3. Sređivanjem izraza pod korijenima dobiva se
$\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2} - 2\sqrt{(\sqrt{2x-1}-2)^2} + 3\sqrt{(\sqrt{2x-1}-3)^2} = 4$, tj.
$|\sqrt{2x-1}-1| - 2|\sqrt{2x-1}-2| + 3|\sqrt{2x-1}-3| = 4$.
Operacije su definirane za $x \geq \frac{1}{2}$. Moramo promatrati ova četiri slučaja:
a) $\sqrt{2x-1} - 1 \leq 0$, tj. $x \in [\frac{1}{2}, 1]$;
b) $0 \leq \sqrt{2x-1} - 1$, $\sqrt{2x-1} - 2 \leq 0$, tj. $x \in [1, \frac{5}{2}]$;
c) $0 \leq \sqrt{2x-1} - 2$, $\sqrt{2x-1} - 3 \leq 0$, tj. $x \in [\frac{5}{2}, 5]$;
d) $0 \leq \sqrt{2x-1} - 3$, tj. $x \in [5, +\infty)$.

Tada je
a) $-\sqrt{2x-1}+1+2\sqrt{2x-1}-4-3\sqrt{2x-1}+9=4$,
odakle se dobiva $x=1$.
b) $\sqrt{2x-1}-1+2\sqrt{2x-1}-4-3\sqrt{2x-1}+9=4$.
Ova jednadžba se zapisuje u ekvivalentnom obliku $4=4$, pa zadovoljavaju svi brojevi iz intervala $[1,\frac{5}{2}]$.
c) $\sqrt{2x-1}-1-2\sqrt{2x-1}+4-3\sqrt{2x-1}-9=4$,
odakle dobivamo $x=\frac{5}{2}$.
d) $\sqrt{2x-1}-1-2\sqrt{2x-1}+4+3\sqrt{2x-1}-9=4$,
pa je $x=13$.
Rješenja ove jednadžbe su svi brojevi $x\in[1,\frac{5}{2}]\cup\{13\}$.

4. Nađimo jedan broj danog oblika koji je djeljiv sa 1999.
Neka je $1999\cdot a=\overline{\ldots 1995}$. Odavde dobivamo da je $a=10b+5$. Sada je $1999\cdot(10b+5)=19990b+9995=\overline{\ldots 1995}$, odakle je $b=100c$.
Nadalje, $1999000c+9995=\overline{\ldots 1995}$ odakle se vidi da c mora završavati znamenkom 8 jer $8\cdot 9+9$ završava znamenkom 1. Tada je broj $1999\cdot 8005=16\,001\,995$ djeljiv sa 1999 i ima traženi oblik.

Pomoću Dirichletovog principa.
Uzmimo $a_0=0$, $a_1=1995$, $a_2=19951995,\ldots$, $a_{1999}=19951995\ldots1995$. Ovih brojeva ima 2000 pa po Dirichletovom principu postoje dva koja daju isti ostatak pri dijeljenju sa 1999. Razlika ta dva broja je oblika $10^{4k}(10^4n+1995)$, $k\geq 0, n\geq 1$, $k,n\in\mathbf{Z}$. Kako je $m(1999,10^{4k})=1$ to je broj $10^{4k}n+1995$ djeljiv sa 1999, a on je traženog oblika.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Umag, 11. – 14. svibnja 1995. godine

II. razred

1. Neka su a, b, c kompleksni brojevi takvi da je $|a| = |b| = |c| = 1$.

   (a) Ako je $a + b + c \neq 0$, pokažite da je

   $$\left|\frac{bc + ca + ab}{a + b + c}\right| = 1.$$

   (b) Pokažite da je

   $$\frac{(b + c)(c + a)(a + b)}{abc}$$

   realan broj.

2. Za koje cijele brojeve x izraz $x^2 + 1$ dijeli $x^3 - 8x^2 + 2x$?

3. Zadan je trokut ABC s visinama h_a, h_b, h_c. Sjecišta simetrala kutova s nasuprotnim stranicama označimo s D, E, F, a udaljenosti točaka D, E, F od pravaca AB, BC, CA redom sa d_a, d_b, d_c. Dokažite nejednakost

   $$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} \geq \frac{3}{2}.$$

4. Na željezničkoj pruzi dugačkoj 56 km ima 11 postaja $A_1, A_2, \ldots, A_{11}$. Udaljenosti oblika $d(A_i, A_{i+2})$, $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ nisu veće od 12 km, a udaljenosti oblika $d(A_i, A_{i+3})$, $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ nisu manje od 17 km. Kolika je udaljenost $d(A_2, A_7)$?

Rješenja zadataka za drugi razred

Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. a) Kako su a, b, c kompleksni brojevi modula 1 to je

$$|bc + ca + ab| = |abc(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})| =$$

$$= |\frac{1}{a} \cdot a\bar{a} + \frac{1}{b} \cdot b\bar{b} + \frac{1}{c} \cdot c\bar{c}| = |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| = |a + b + c|,$$

odakle slijedi tražena jednakost.

b) Ako je $s = a + b + c$, onda je

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc} = \frac{2abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}{abc} =$$

$$= 2 + \frac{ab(s-c) + bc(s-a) + ca(s-b)}{abc} = -1 + \frac{s(ab+bc+ca)}{abc} =$$

$$= -1 + \frac{(a+b+c)abc(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b})}{abc} = -1 + (a+b+c)(\overline{a+b+c}) \in \mathbf{R}.$$

2. Pri dijeljenju polinoma $x^3 - 8x^2 + 2x$ sa $x^2 + 1$ dobiva se ostatak $x + 8$. Dakle, dovoljno je vidjeti za koje cijele brojeve x je $x + 8$ djeljiv sa $x^2 + 1$. Očito x mora biti paran. Dalje, može biti ili $x + 8 = 0$ ili $|x + 8| \geq x^2 + 1$. Ako je $x+8 > 0$, onda mora biti $x^2 - x - 7 \leq 0$, tj. $x \in \{-2, 0, 2\}$. Ako je $x+8 < 0$, onda mora biti $x^2 + x + 9 \leq 0$, što nema rješenja niti u skupu realnih brojeva, pa onda niti u skupu parnih brojeva. Ostaje provjeriti da li su ovi kandidati za rješenja zaista rješenja. Dobiva se da su rješenja $x \in \{-8, 0, 2\}$.

3. Za površine trokuta vrijedi ova jednakost

$P_{ABC} = P_{ABD} + P_{DCA}$, tj. $\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bd_a + \frac{1}{2}cd_a$,

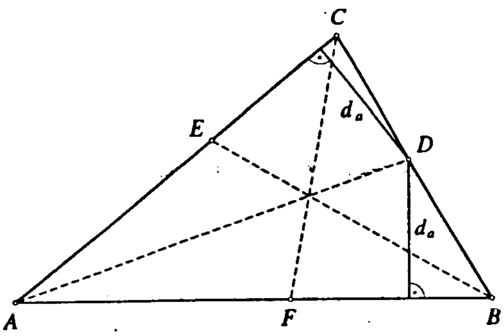
odakle dobivamo $\frac{d_a}{h_a} = \frac{a}{b+c}$.

Analogno je $\frac{d_b}{h_b} = \frac{b}{a+c}$, i $\frac{d_c}{h_c} = \frac{c}{a+b}$.

Preostaje pokazati da je

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$,

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta (nejednakost vrijedi za bilo koje pozitivne brojeve a, b, c).



Da dokažemo ovu nejednakost uvedimo supstituciju: $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$, tj. $a = \frac{1}{2}(y + z - x)$, $b = \frac{1}{2}(x + z - y)$, $c = \frac{1}{2}(x + y - z)$. Brojevi x, y, z su pozitivni. Sada je

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}\left(\frac{y+z-x}{x} + \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) - 3\right] \geq \frac{1}{2}(2 + 2 + 2 - 3) = \frac{3}{2},$$

jer je $q + \frac{1}{q} \geq 2$ za bilo koji pozitivan broj q.

4. Kako je

$d(A_i, A_{i+1}) = d(A_i, A_{i+3}) - d(A_{i+1}, A_{i+3}) \geq 17$ km -12 km $= 5$ km, za $i = 1, 2, \ldots, 8$; i

$d(A_{i+2}, A_{i+3}) = d(A_i, A_{i+3}) - d(A_i, A_{i+2}) \geq 17$ km -12 km $= 5$ km, za $i = 1, 2, \ldots, 8$,

udaljenost bilo kojih dviju susjednih postaja je barem 5 km.

Iz $d(A_1, A_2) \geq 5$ km i $d(A_i, A_{i+3}) \geq 17$ km slijedi da je

$$56 \text{ km} = d(A_1, A_2) + d(A_2, A_5) + d(A_5, A_8) + d(A_8, A_{11}) \geq$$
$$\geq (5 + 17 + 17 + 17) \text{ km} = 56 \text{ km}$$

radi čega mora svugdje vrijediti znak jednakosti pa je $d(A_1, A_2) = 5$ km. Analogno je $d(A_{10}, A_{11}) = 5$ km. Nadalje iz

$$56 \text{ km} = d(A_1, A_4) + d(A_4, A_5) + d(A_5, A_8) + d(A_8, A_{11}) \geq$$
$$\geq (17 + 5 + 17 + 17) \text{ km} = 56 \text{ km}$$

vidimo da svugdje mora vrijediti znak jednakosti tj. $d(A_4, A_5) = 5$ km. Analogno je $d(A_7, A_8) = 5$ km.

Primijetimo da je

$$d(A_2, A_7) = d(A_2, A_4) + d(A_4, A_5) + d(A_5, A_7).$$

Iz $17 \text{ km} = d(A_2, A_5) = d(A_2, A_4) + d(A_4, A_5)$ i $17 \text{ km} = d(A_4, A_7) = d(A_4, A_5) + d(A_5, A_7)$ vidimo da je $d(A_2, A_4) = d(A_5, A_7) = 12$ km.

Sada je $d(A_2, A_7) = 29$ km.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Umag, 11. - 14. svibnja 1995. godine

III. razred

1. Nađite najveći prirodan broj n koji je djeljiv sa svim prirodnim brojevima k takvima da je $k \leq \sqrt{n}$.

2. (a) Služeći se poznatim formulama $a = 2R\sin\alpha$ i $s - a = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ u trokutu ABC s polumjerima R i r opisane i upisane kružnice i poluopsegom s i izražavajući $\sin\alpha$ i $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ pomoću $\cos\alpha$ pokažite da je broj $\cos\alpha$ rješenje jednadžbe

$$4R^2x^3 - 4R(R+r)x^2 + (s^2 + r^2 - 4R^2)x + (2R+r)^2 - s^2 = 0.$$

(b) Izrazite brojeve $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ i $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ pomoću duljina R, r i s.

(c) Pokažite da je zbroj orijentiranih udaljenosti središta O opisane kružnice trokuta ABC od pravaca BC, CA, AB jednaka $R + r$, ako se orijentirana udaljenost točke O od npr. pravca BC uzima kao pozitivna ili negativna već prema tome da li su točke O i A s iste ili s različitih strana tog pravca.

(d) Ako se konveksan tetivni n-terokut na bilo koji način podijeli na $n-2$ trokuta pomoću $n-3$ dijagonala, koje se ne sijeku unutar tog poligona, pokažite da je zbroj polumjera upisanih kružnica tih trokuta stalan bez obzira na podjelu na trokute.

(Napomena: Ovaj zadatak vrijedi 50 bodova (ostali po 25), a pri rješavanju pojedinog dijela ovog zadatka dopušteno je koristiti ranije dijelove makar i ne bili riješeni.)

3. Na nekom turističkom putovanju bilo je ukupno 17 turista. Utvrđeno je da su bilo koja dvojica od njih bili međusobno "na ti" ili "na vi" ili uopće nisu razgovarali. Dokažite da među tih 17 ljudi postoje bar trojica koji su međusobno bili "na ti" ili bar trojica koji su međusobno bili "na vi" ili bar trojica koji međusobno nisu razgovarali.

Rješenja zadataka za treći razred.

1. Neka je m prirodni broj takav da je $m \leq \sqrt{n} < m+1$. Tada je $n \leq (m+1)^2 - 1 = m(m+2)$. Iz uvjeta zadatka slijedi da je n djeljiv sa $m, m-1$ i $m-2$.

Ako je m neparan, to znači da $m(m-1)(m-2)|n$, tj. $m(m-1)(m-2) \leq m(m+2)$, a odavde se dobiva $m^2 - 4m \leq 0$ odnosno $m \leq 4$.

Ako je m paran, onda $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)|n$, tj. $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2) \leq m(m+2)$. Ovu nejednakost zapišemo u obliku $m^2 - 5m - 2 \leq 0$. Rješenja kvadratne jednadžbe $m^2 - 5m - 2 = 0$ su $m_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$, a kako je m prirodan broj mora biti $m \leq 5$, a jer je m paran mora biti $m \leq 4$.

Dakle, u svakom slučaju je $m \leq 4$ i $n \leq 24$. Sada provjeravamo da je traženi broj jednak $n = 24$, koji je djeljiv sa $1, 2, 3$ i 4. 25 bodova

2. a) Zbrajanjem danih formula dobivamo

$s = 2R\sqrt{1-\cos^2\alpha} + r\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

jer je $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

Zato je $\cos\alpha$ rješenje jednadžbe

$2R\sqrt{1-x^2} + r\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = s$, tj.

$\sqrt{1+x}(2R + r - 2Rx) = s\sqrt{1-x}$, tj.

$(1+x)[4R^2x^2 - 4R(2R+r)x + (2R+r)^2] + s^2(x-1) = 0$,

a ova jednadžba dobiva traženi oblik. 20 bodova

b)Promatranu jednadžbu zadovoljavaju brojevi $x_1 = \cos\alpha$, $x_2 = \cos\beta$, $x_3 = \cos\gamma$ zbog simetrije. Ona je oblika $4R^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$, tj.

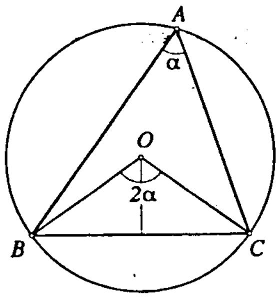
$4R^2x^3 - 4R^2(x_1+x_2+x_3)x^2 + 4R^2(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)x - 4R^2x_1x_2x_3 = 0$.

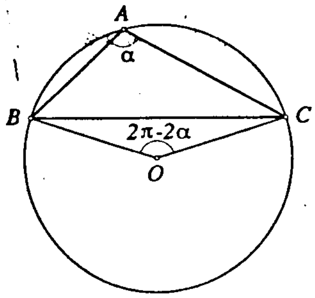
Uspoređivanjem koeficijenata uz x^2 i x° dobivamo

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{R+r}{R}$,

$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = x_1x_2x_3 = \frac{s^2-(2R+r)^2}{4R^2}$. 5 bodova

c) Orijentirana udaljenost točke O od pravca BC je uvijek $d_a = R\cos\alpha$. Zato je zbog b) $d_a + d_b + d_c = R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = R + r$. 5 bodova





d) Za svaki od trokuta podjele napiše se jednakost iz c). S lijeve strane dobivene jednakosti nalazi se zbroj udaljenosti središta O opisane kružnice (O, R) poligona od svih stranica svih trokuta podjele. Po dvije udaljenosti, koje se odnose na neku dijagonalu poligona kao stranicu dvaju trokuta, su suprotne pa se poništavaju i zato u zbroju ostaje samo zbroj $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ udaljenosti točke O od stranica poligona. Na desnoj strani jednakosti dobivamo traženi zbroj polumjera upisanih kružnica uvećan za $(n-2)R$. Zato je traženi zbroj jednak $d_1 + d_2 + \ldots + d_n - (n-2)R$. 20 bodova

3. Neka je M bilo koji turist putovanja. Preostalih 16 turista možemo u odnosu na nj podijeliti na tri grupe: grupu onih koji su s njim bili "na ti", "na vi" ili nisu s njim razgovarali. Bar jedna od tih grupa mora imati barem 6 članova (jer je $16 : 3 > 5$). Recimo de je to ona treća grupa. Ako među njenih 6 članova postoje dvojica koji međusobno nisu razgovarali, tvrdnja je dokazana.

Uzmimo sada da takve dvojice u toj grupi nema tj. da su svaka dvojica u toj grupi razgovarala i bili su "na ti" ili "na vi". Neka je N bilo koji član te grupe. On je sa preostalih 5 "na ti" ili "na vi", no bar sa trojicom je bio "na ti" ili "na vi". Recimo da je s trojicom bio "na vi". Ako među tom trojicom postoje dvojica koji su međusobno također bili "na vi", onda ta dvojica sa N čine traženu trojku.

U protivnom ta trojica su međusobno bili "na ti", pa opet imamo jednu traženu trojku. 25 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Umag, 11. - 14. svibnja 1995. godine

IV. razred

1. Zadan je trokut $A_0B_0C_0$ s kutovima $\alpha = 40°, \beta = 60°, \gamma = 80°$. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina tog trokuta. Na isti način se polazeći od trokuta $A_1B_1C_1$ konstruira trokut $A_2B_2C_2$, zatim redom trokuti $A_3B_3C_3, \ldots$. Dokažite da je trokut $A_{1995}B_{1995}C_{1995}$ sličan trokutu $A_0B_0C_0$.

2. Neka je n prirodan broj koji se može prikazati kao suma kvadrata dvaju prirodnih brojeva na dva različita načina:

   $n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \qquad a \neq c, \quad b \neq d.$

   Dokažite da je n složen broj.

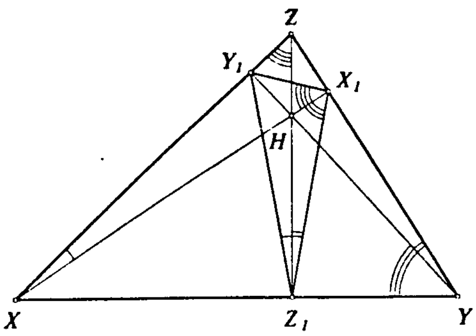
3. Sve točke ravnine su na bilo koji način podijeljene na dva disjunktna skupa. Dokažite da postoji trokut čiji vrhovi pripadaju istom skupu, najmanja stranica mu ima duljinu 1 i kutovi mu se odnose kao 1 : 2 : 3.

4. Zadan je niz $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4, \quad x_{n+3} = x_{n+2} + x_{n+1} + x_n,$ za svako $n \in N$. Dokažite da se svaki prirodni broj može prikazati kao zbroj različitih elemenata tog niza.

Rješenja za 4. razred.

Svaki zadatak nosi 25 bodova.

1. a) Neka je XYZ šiljastokutan ili pravokutan trokut s kutovima α, β, γ i X_1, Y_1, Z_1 nožišta visina na stranice YZ, ZX, XY.



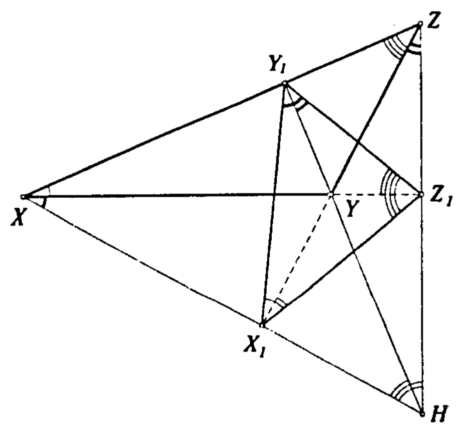
Četverokuti XZ_1HY_1, YX_1HZ_1 i ZY_1HX_1 su tetivni i zato je:
$\angle Y_1XH = \angle Y_1Z_1H$, $\angle HZ_1X_1 = \angle HYX_1$, $Z_1X_1H = \angle Z_1YH$ i $\angle HX_1Y_1 = \angle HZY_1$.

Sada je

$\angle X_1Y_1Z_1 = \pi - \angle Y_1Z_1X_1 - \angle Z_1X_1Y_1 = \pi - \angle XYZ - \angle ZXX_1 - \angle Z_1ZX =$
$= \pi - \beta - (\frac{\pi}{2} - \gamma) - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha + \beta + \gamma - 2\beta = \pi - 2\beta.$

Analogno je $\angle Y_1Z_1X_1 = \pi - 2\gamma$ i $\angle Z_1X_1Y_1 = \pi - 2\alpha$.

b) Neka je $\triangle XYZ$ tupokutan, $\beta \geq \frac{\pi}{2}$.



Četverokti XX_1YY_1, YX_1HZ_1 i Y_1YZ_1Z su tetivni pa je
$\angle ZXY = \angle ZX_1Z_1$, $\angle ZX_1Z_1 = \angle YHZ_1$, $\angle X_1Z_1Y = \angle X_1HY$ i $\angle YZ_1Y_1 = \angle YZY_1$.

Sada je $\quad\quad\quad\quad \angle XHZ$

$\angle Z_1Y_1X_1 = \pi - \angle Y_1X_1Z_1 - \angle X_1Z_1Y_1 = \pi - \cancel{\angle Y_1X_1Z_1} - (\pi - \angle YZX -$
$- \angle ZXY) = \pi - (\pi - \beta) - (\pi - \beta) = 2\beta - \pi;$

$\angle Y_1X_1Z_1 = \pi - \angle X_1Z_1Y_1 - \angle Z_1Y_1X_1 = \pi - \angle Z_1ZX - \angle XHY_1 - \angle Z_1XH =$
$= \pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) - (\frac{\pi}{2} - \alpha - \angle YXH) - \angle YXH = 2\alpha.$

Analogno se dobije $\angle X_1Z_1Y_1 = 2\gamma$.

Primijenimo sada ovo na naš zadatak:

Kutovi trokuta $A_1B_1C_1$ su 100°, 60°, 20°;

Kutovi trokuta $A_2B_2C_2$ su 20°, 120°, 40°;

Kutovi trokuta $A_3B_3C_3$ su 40°, 60°, 80°.

Dobili smo trokut koji ima kutove jednake kutovima polaznog trokuta pa su ti trkuti slični. Zato su svi trokuti $A_{3k}B_{3k}C_{3k}$ slični. Kako je $1995 = 3 \cdot 665$ to su trokuti $A_0B_0C_0$ i $A_{1995}B_{1995}C_{1995}$ slični.

2. Možemo pretpostaviti da su a i c te b i d iste parnosti. To je očito ako je n neparan. Ako je n djeljiv sa 4, onda su a, b, c i d parni, a ako je n paran i nije djeljiv sa 4, onda su a, b, c i d neparni.

Danu jednakost možemo zapisati u obliku

$(a-c)(a+c) = (d-b)(d+b)$ ili $\frac{a-c}{d-b} = \frac{d+b}{a+c} = \frac{u}{v}$.

Ako smo prvi razlomak skratili sa $2t$, a drugi sa $2s$, onda je

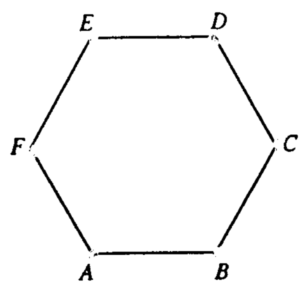
$a - c = 2tu, \quad d - b = 2tv, \quad a + c = 2sv, \quad d + b = 2su,$

odakle je $a = tu + sv, \quad b = su - tv$. Sada je

$n = a^2 + b^2 = (tu + sv)^2 + (su - tv)^2 = (t^2 + s^2)(u^2 + v^2)$

odakle se vidi da je broj n složen.

3. Neka je $r > 0$. Dokažimo, najprije, da uvijek postoje dvije točke koje pripadaju istom skupu i čija je udaljenost jednaka r. Promatrajmo bilo koji jednakostranični trokut stranice duljine r. Dva njegova vrha sigurno pripadaju istom skupu.



Neka su točke jednog skupa obojene bijelom, a druge crnom bojom. Izaberimo točke A i D iz istog skupa (npr. bijele) čija udaljenost je jednaka 2. Sada promatrajmo pravilan šesterokut $ABCDEF$.

Ako je jedna od točaka B, C, E i F bijela, recimo točka B, tada je traženi trokut ADB. Ako su sve ove točke crne, onda je npr. trokut BCE traženi trokut.

4. Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije.

a) Baza indukcije: Svaki prirodan broj ≤ 4 može se prikazati u traženom obliku - $1 = 1, \quad 2 = 2, \quad 3 = 1 + 2, \quad 4 = 4$.

b) Korak indukcije: Neka se za neki $k \geq 3$ svaki broj $n < x_k$ može prikazati u traženom obliku.

Neka je $n < x_{k+1}$.

Ako je $n = x_k$, onda je to već traženi prikaz.

Ako je $x_k < n < x_{k+1}$ onda je

$n - x_k < x_{k+1} - x_k = x_{k-1} + x_{k-2} < x_{k-1} + x_{k-2} + x_{k-3} = x_k$.

Prema pretpostavci broj $n - x_k$ može se prikazati kao zbroj od nekoliko elemenata $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l} < x_k$. Tada je $n = x_k + x_{i_1} + \ldots + x_{i_l}$.