ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika osnovnih škola Republike Hrvatske

4. ožujka 1995. godine

7. razred

1. Za koje vrijednosti parametra a jednadžba

$$ax - 2a = 3x - 8$$

ima pozitivno rješenje ?

2. Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji su za jedan manji od šesterostrukog zbroja svojih znamenki.

3. Koliki je opseg pravilnog mnogokuta kome je duljina stranice 12 cm, a broj svih dijagonala 252 ?

4. Tri su broja proporcionalna brojevima 1.5, 0.625, $\frac{7}{12}$. Koji su to brojevi, ako je prvi broj za 21 veći od zbroja ostalih dvaju brojeva ?

5. Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakostraničnog trokuta ABC nacrtani su s vanjske strane kvadrati $ACMN$ i $BCPQ$. Pravac koji prolazi točkom B i središtem kvadrata $ACMN$ siječe pravac PM u točki D. Dokaži da je trokut BPD jednakokračan.

195 OPĆ.

Rješenja za 7. razred

Svaki zadatak donosi 10 bodova. Uz neke zadatke dan je prijedlog raspodjele bodova.

1. Ako nepoznanicu x izrazimo pomoću parametra a, dobivamo $x = \frac{2a-8}{a-3}$, pri čemu je $a - 3 \neq 0$. Rješenje će biti pozitivno ako su brojnik i nazivnik istog predznaka. Zato razlikujemo dva slučaja:

.... 4 boda

(a) $2a - 8 > 0, a - 3 > 0$. Odavde slijedi da je $a > 4$ i $a > 3$. Rješenje je svaki broj $x > 4$.

.. 2 boda

(b) $2a - 8 < 0, a - 3 < 0$. Odavde slijedi da je $a < 4$ i $a < 3$. Rješenje je svaki broj $a < 3$.

.... 2 boda

Zadana jednadžba imat će pozitivna rješenja za svaki broj $a < 3$ ili $a > 4$.

.... 2 boda

.... Ukupno 10 bodova

2. Neka traženi dvoznamenkasti broj ima oblik $\overline{ab}$. Tada vrijedi jednakost $10a + b + 1 = 6(a + b)$ ili nakon sređivanja $4a + 1 = 5b$. Ako a izrazimo pomoću b, dobivamo redom

$$4a = 5b - 1\ , \ a = \frac{5b-1}{4}\ , \ a = \frac{4b+b-1}{4}\ , \ a = b + \frac{b-1}{4}\ .$$

Broj a bit će prirodan broj ako je $b - 1 = 4k$, tj. $b = 4k + 1$. Uvrstimo li dobivenu vrijednost za b u jednakost $a = \frac{5b-1}{4}$, dobivamo redom

$$a = \frac{5(4k+1)-1}{4}\ , \ a = \frac{20k+5-1}{4}\ , \ a = \frac{20k+4}{4}\ ,$$

tj. $a = 5k + 1$.

Sad je očito da broj k može imati samo dvije vrijednosti, $k = 0$ ili $k = 1$, jer su a i b znamenke.

..... 6 bodova

Za $k = 0$ dobivamo $a = 1$ i $b = 1$, a za $k = 1$ dobivamo $a = 6$ i $b = 5$, pa su to jedina dva rješenja.

Traženi dvoznamenkasti brojevi su 11 i 65.

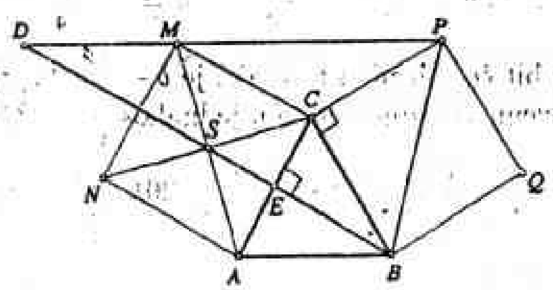
.... 4 boda

.... Ukupno 10 bodova

3. Neka je n broj stranica pravilnog mnogokuta. Tada je broj njegovih dijagonala $\frac{(n-3)n}{2} = 252$, ili $(n-3)n = 504$. Ako broj 504 rastavimo na proste faktore, dobivamo $(n-3)n = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$, tj. $(n-3)n = 21\cdot 24$ iz čega slijedi da je $n = 24$.
Zato je traženi opseg $24\cdot 12$, tj. 288 cm.
.... 10 bodova

4. Neka su a, b, c redom traženi brojevi. Uvođenjem faktora proporcionalnosti k, možemo pisati $a = 1.5k, b = 0.625k, c = \frac{7}{12}k$. Iz $a = b + c + 21$ dobivamo $1.5k = 0.625k + \frac{7}{12}k + 21$, a rješenje te jednadžbe je $k = 72$. Traženi brojevi su $a = 108, b = 45, c = 42$.
.... 10 bodova

5. Neka je točka S sjecište dijagonala kvadrata $ACMN$, a $\overline{BP}$ dijagonala kvadrata $BCPQ$. Očito je $\angle CBP = \angle CPB = 45°$, jer je trokut BCP jednakokračan i pravokutan. Kako je trokut MCP jednakokračan, jer je $|CM| = |CP|$, a kut $\angle MCP = 360° - (2\cdot 90° + 60°)$, tj. $\angle MCP = 120°$, slijedi da je $\angle CMP = \angle CPM = 30°$, a to znači da je $\angle BPD = 75°$.
Trokut ACS je jednakokračan, jer je $|AS| = |CS|$, a zbog $|AB| = |CB|$ zaključujemo da točke B i S leže na simetrali stranice $\overline{AC}$, pa je $BS \perp AC$. Neka je točka E sjecište pravca BS i pravca AC. Trokut BEC je pravokutan, jer je $\angle BEC = 90°$, a zbog $\angle BCE = 60°$ slijedi da je $\angle CBE = 30°$, odnosno $\angle PBD = 75°$. Iz jednakosti $\angle BPD = \angle PBD = 75°$ zaključujemo da je trokut BPD jednakokračan.



.... 10 bodova