ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

4. ožujka 1995. godine

8. razred

1. Izračunaj:

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}.$$

2. Odredi sve cijele brojeve a za koje je razlomak

$$\frac{a^2-11a+24}{a^2-9a+8}$$

isto cijeli broj.

3. Dan je pravokutnik $ABCD$, tako da je $|AC| = 2|BC|$. Neka je E nožište okomice iz vrha B na dijagonalu $\overline{AC}$. Odredi opseg i površinu pravokutnika $ABCD$ ako je $|CE| = 5$ cm.

4. Strojoslagar je izračunao da će tiskanje knjige završiti tri dana prije roka ako svakog dana složi dvije stranice preko norme. Ako bi svakog dana složio četiri stranice preko norme, tiskanje bi bilo završeno pet dana prije roka.
Koliko ukupno stranica treba strojoslagar otiskati i u kojem roku ?

5. Zadan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom u vrhu C, pri čemu je $|BC| < |AC|$. Kružnica sa središtem u vrhu C polumjera $\overline{BC}$ siječe hipotenuzu $\overline{AB}$ u točki D, tako da je $|BD| = 98$ cm i $|AD| = 527$ cm. Odredi duljine kateta pravokutnog trokuta ABC.

Svaki zadatak donosi 10 bodova. Uz neke zadatke dan je prijedlog raspodjele bodova.

1. Ako prvi razlomak proširimo sa $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, a drugi razlomak sa $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, pa dobivene razlomke svedemo na zajednički nazivnik, dobivamo redom

$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{3-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}}{3+2\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{9-8}}{3-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{9-8}}{3+2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{9-8}-\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\,.$$

.... 10 bodova

2. Ako brojnik i nazivnik zadanog razlomka rastavimo na faktore, dobivamo redom

$$\frac{a^2-11a+24}{a^2-9a+8}=\frac{a^2-3a-8a+24}{a^2-a-8a+8}=\frac{a(a-3)-8(a-3)}{a(a-1)-8(a-1)}=$$

$$=\frac{(a-3)(a-8)}{(a-1)(a-8)}=\frac{a-3}{a-1}=\frac{a-1-2}{a-1}=1-\frac{2}{a-1}\,.$$

..... 6 bodova

Sad je očito da će zadani razlomak biti cijeli broj ako je razlomak $\frac{2}{a-1}$ cijeli broj, a to je moguće samo ako je $a-1=1, a-1=-1, a-1=2, a-1=-2$, tj. ako je $a=2, a=0, a=3, a=-1$.

.... 4 boda

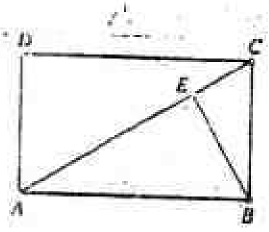
.... Ukupno 10 bodova

3. Kako je trokut ABC pravokutan, a zbog $|AC|=2|BC|$ slijedi da je trokut ABC polovica jednakostraničnog trokuta, pa je $\angle BAC=30°$ i $\angle BCA=60°$, a to znači da je $\angle CBE=30°$ i trokut BEC isto polovica jednakostraničnog trokuta, iz čega zaključujemo da je $|BC|=2|CE|$, tj. $|BC|=10$ cm, a $|AC|=20$ cm.

.... 6 bodova

Primjenom Pitagorina poučka na trokut ABC lako odredimo $|AB|$. Naime, $|AB|^2 = 20^2 - 10^2$, odnosno $|AB|^2 = 300$, ili $|AB| = 10\sqrt{3}$ cm. Zato je traženi opseg $O = 2 \cdot 10 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 10$, tj. $O = 20(\sqrt{3}+1)$ cm, a površina $P = 10\sqrt{3} \cdot 10$, tj. $P = 100\sqrt{3}$ cm^2.

.... 4 boda

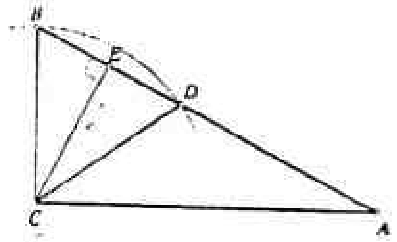


.... Ukupno 10 bodova

4. Neka je x broj dana, a y broj stranica koje treba otiskati u toku jednog dana da bi tiskanje bilo završeno u predviđenom roku. Tada je xy ukupan broj stranica.
Iz prvog uvjeta slijedi jednadžba $(x-3)(y+2) = xy$, ili nakon sređivanja $2x - 3y = 6$. Iz drugog uvjeta slijedi jednadžba $(x-5)(y+4) = xy$, ili nakon sređivanja $4x - 5y = 20$. Rješenje sustava jednadžbi $2x - 3y = 6, 4x - 5y = 20$ je $x = 15, y = 8$. Strojoslagar treba za 15 dana otiskati 120 stranica knjige.

.... 10 bodova

5. Neka je $|BC| = a, |AC| = b$ i neka je $|CE| = v$ duljina visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$, odnosno osnovicu $\overline{BD}$ trokuta BCD. Kako je trokut BCD jednakokračan, jer je $|CB| = |CD|$, slijedi da je $|BE| = |DE| = 49$ cm, pa je $|AE| = 527+49 = 576$ cm. Primjenom Pitagorina poučka na trokut BEC i trokut AEC vrijede jednakosti $v^2 = a^2 - 49^2$, odnosno $v^2 = b^2 - 576^2$. Kako su lijeve strane ovih jednakosti jednake, to očito vrijedi $b^2 - 576^2 = a^2 - 49^2$, a zbog $c^2 = 625^2$ i $a^2 = c^2 - b^2$, tj. $a^2 = 625^2 - b^2$, imamo za b jednadžbu $b^2 - 576^2 = 625^2 - b^2 - 49^2$ ili nakon sređivanja $b^2 = 360000$ pa je $b = 600$ cm.
Sad lako iz jednakosti $a^2 = 625^2 - 600^2$ odredimo $a = 175$ cm.



.... 10 bodova