MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. ožujka 1996.

1. razred

1. Dokažite da ne postoje realni brojevi a, b, c koji zadovoljavaju jednakosti

$$a + b + c = 63,$$

$$ab + bc + ca = 1996.$$

2. Dokažite da zbroj kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva ne može biti kvadrat nekog cijelog broja.

3. Za koje vrijednosti realnog parametra a jednadžba

$$\frac{a-5}{x+1} - \frac{7+3a}{x-2} = \frac{2ax-5}{x^2-x-2}$$

nema rješenje?

4. Kružnici polumjera $r = 3$ dm opisan je jednakokračan trokut kojemu je kut pri vrhu $120°$. Izračunajte površinu tog trokuta.

Rješenja zadataka za prvi razred

1. Pretpostavimo da postoje takvi brojevi. Tada iz identiteta

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 5 bodova

i danih uvjeta u zadatku slijedi

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 63^2 - 2\cdot 1996 = \\ = 3969-3992 = -23 < 0.$$

Kako smo došli do proturječja, polazna pretpostavka nije istinita, tj. takvi brojevi ne postoje. 20 bodova

2. Promatrajmo zbroj kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ tj.

$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = 5(n^2+2)$. 5 bodova

Da bi ovaj broj bio potpun kvadrat, broj n^2+2 morao bi biti djeljiv s 5, a to znači da bi n^2 morao završavati znamenkom 3 ili 8. 15 bodova

No, to je nemoguće jer kvadrat cijelog broja završava samo jednom od znamenaka 0, 1, 4, 5 ili 9. 5 bodova

3. Množenjem jednadžbe sa $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ dobivamo nakon sređivanja

$x = \frac{8-5a}{4(a+3)}$. 5 bodova

Za $a=-3$ je $8-5\cdot(-3)\neq 0$ i stoga za $a=-3$ jednadžba nema rješenje. 5 bodova

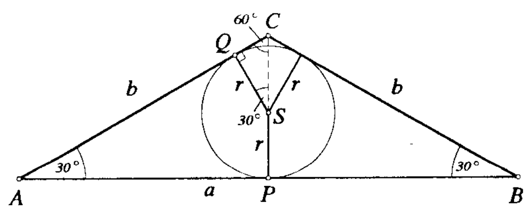
Iz istih razloga $x=-1$ i $x=2$ ne mogu biti rješenja. 5 bodova

Uvrstimo li $x=-1$, dobivamo $a=20$, 5 bodova

odnosno za $x=2$ dobivamo $a=-\frac{16}{13}$. 5 bodova

Dakle, za $a\in\{-3,-\frac{16}{13},20\}$ jednadžba nema rješenje.

4.



2 boda

Uz oznake kao na slici trokut CQS je polovica jednakostraničnog trokuta stranice $x=|CS|$. Zato je

$r = \frac{x}{2}\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad x = 2\sqrt{3}.$ 9 bodova

Označimo sa $a=|AB|$, $v=r+x=3+\sqrt{3}$, visinu trokuta ABC i $2v=|AC|=|BC|$. Trokut APC je polovica jednakostraničnog, pa je

$\frac{a}{2} = \frac{2v}{2}\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad a = 12+6\sqrt{3}.$ 9 bodova

Sada je površina trokuta $P=\frac{av}{2}=(36+21\sqrt{3})$ dm^2. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. ožujka 1996.

2. razred

1. Dokažite da je trokut jednakostraničan ako i samo ako je zbroj duljina njegovih visina jednak deveterostrukom polumjeru njegove upisane kružnice.

2. Odredite brojeve p i q, ako je poznato da je razlika korijena jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ jednaka 5, a razlika njihovih kubova 35.

3. Neka je $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Pokažite da je
$(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega) = a^3+b^3+c^3-3abc.$

4. U trokutu ABC poznate su duljine stranica $b = |AC|$ i $c = |AB|$ i $\angle ABC = 3\angle BCA$. Na stranici $\overline{AC}$ odabrane su točke D i E takve da je $\angle ABD = \angle DBE = \angle EBC$. Izrazite pomoću b i c duljine dužina $\overline{AD}$, $\overline{DE}$ i $\overline{EC}$

Rješenja zadataka za drugi razred

1. Iz formula

$2P = ah_a = bh_b = ch_c = 2rs = r(a+b+c)$, 5 bodova

gdje je P površina trokuta, slijedi

$h_a + h_b + h_c = 2P(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = r(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) =$

$= r(3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b})$. 10 bodova

Kako je $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, itd., slijedi

$h_a + h_b + h_c \geq r(3+2+2+2) = 9r$, 5 bodova

s jednakošću ako i samo ako je $a = b = c$. 5 bodova

2. Prema uvjetu zadatka je

$x_1 - x_2 = 5, \quad x_1^3 - x_2^3 = 35$,

odakle slijedi $\quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 7$. 5 bodova

Sada je

$q = x_1x_2 = \frac{1}{3}[(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 - x_2)^2] = \frac{1}{3}(7 - 25) = -6$. 10 bodova

$p^2 = (x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2 = 25 - 24 = 1 \Rightarrow p = \pm 1$. 10 bodova

3. Primijetimo da je

$\omega^3 = 1,\ \omega^4 = \omega,\ \omega + \omega^2 = -1$,

odakle je

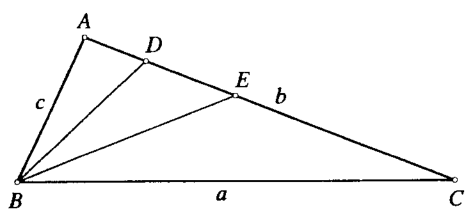
$(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega) =$

$= (a+b+c)[a^2+b^2+c^2+\omega(ab+bc+ca)+\omega^2(ab+bc+ca)] =$

$= (a+b+c)[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)] =$

$= a^3+b^3+c^3-3abc$. 25 bodova

4.



Označimo $x = |AD|$, $y = |DE|$ i $z = |EC|$. Primijetimo da je $\angle BCE = \angle EBC$ i $\angle BEA = 2\angle EBC = \angle ABE$. 7 bodova

Zato su trokuti BCE i ABE jednakokračni

$(|BE| = |CE|$ i $|AB| = |AE|)$. 5 bodova

Simetrala kuta ABE je BD. Stoga vrijedi

$x + y + z = b$,

$x + y = c$,

$x : y = c : z$. 8 bodova

Rješavanjem ovog sistema dobije se

$x = \frac{c^2}{b}$, $y = \frac{c(b-c)}{b}$, $z = b - c$. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. ožujka 1996. godine

3. razred

1. Riješite jednadžbu

$$2\log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1}-1).$$

2. Zadana je funkcija $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

   (a) Odredite sve realne brojeve m za koje jednadžba $f(x) = m$ ima rješenje.

   (b) Riješite jednadžbu $f(x) = 1$.

   (c) Nađite maksimum funkcije $f(x)$ i odredite za koje vrijednosti x se on postiže.

   (Uputa: Prikažite funkciju $f(x)$ u obliku $a\sin(bx+c)$, gdje su a, b, $c \in \mathbf{R}$.)

3. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ s kutovima α, β, γ i δ od kojih nijedan nije pravi. Dokažite da vrijedi ovaj identitet

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta.$$

4. Oko kružnice polumjera r opisan je trapez kojemu su kutovi uz dulju osnovicu α i β. Dokažite da je omjer površina trapeza i kruga jednak

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. ožujka 1996. godine

4. razred

1. Neka je $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ funkcija sa skupa pozitivnih cijelih brojeva u skup realnih brojeva takva da vrijedi:

   (a) $f(1) = 1$,

   (b) $f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \ldots + nf(n) = n(n+1)f(n)$ za $n \geq 2$.

   Nađite $f(1996)$.

2. Zadana su prva tri člana geometrijskog niza $1,\ q,\ q^2 \quad (q > 0,\ q \neq 1)$.

   (a) Odredite sve $x \in \mathbf{R}$ tako da kvadrati brojeva $1-x$, $q-x$, q^2-x čine aritmetički niz, a zatim ispitajte predznak od x za razne vrijednosti q.

   (b) Izrazite razliku tog aritmetičkog niza kao funkciju od q. Koji uvjet zadovoljava q ako je ovaj niz rastući?

3. Neka su točke $A_i(x_i, y_i)$, $\quad i = 1, 2, 3, 4$ na hiperboli $xy = 1$. Dokažite tvrdnju: ako su sve četiri točke na istoj kružnici, onda je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$.

4. Nađite kut između težišnica $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ strana ABC i SAC pravilnog tetraedra $SABC$.

Rješenja zadataka za četvrti razred

1. Uvjet (a) možemo zapisati u obliku

$n^2 f(n) = f(1) + 2f(2) + 3f(3) + \dots + (n-1)f(n-1)$ za $n \geq 2$.

Nađimo prvih nekoliko vrijednosti za $f(n)$:

$f(2) = \frac{1}{4}, \quad f(3) = \frac{1}{6}, \quad f(4) = \frac{1}{8}, \quad f(5) = \frac{1}{10}$.

Slutimo da je $f(n) = \frac{1}{2n}$ za $n \geq 2$. Dokažimo ovu slutnju metodom matematičke indukcije. 5 bodova

Baza indukcije: Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi.

Pretpostavka: Neka je za neki $n \geq 2$, $\quad f(n) = \frac{1}{2n}$.

Korak indukcije:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \tfrac{1}{(n+1)^2}(f(1) + 2f(2) + \dots + (n-1)f(n-1) + nf(n)) = \\ &= \tfrac{1}{(n+1)^2}(n^2 f(n) + nf(n)) = \tfrac{1}{(n+1)^2} n(n+1)f(n) = \\ &= \tfrac{n}{n+1} \cdot \tfrac{1}{2n} = \tfrac{1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Odakle slijedi da tvrdnja vrijedi i za $n+1$. 15 bodova

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbf{N}$, tj. $f(1996) = \frac{1}{3992}$. 5 bodova

2. (a) U aritmetičkom nizu svaki član je aritmetička sredina susjednih članova.

$2(q-x)^2 = (1-x)^2 + (q^2-x)^2$,

$2x(1+q^2-2q) = 1 + q^4 - 2q^2$,

$2x(1-q)^2 = (1-q^2)^2$, 5 bodova

Kako je $q \neq 1$ to je

$x = \frac{(1-q)^2(1+q)^2}{2(1-q)^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(1+q)^2}{2}$. 10 bodova

Slijedi, za svako $q \in \mathbf{R}$ je $x > 0$.

(b) $d = (q-x)^2 - (1-x)^2 = q^2 - 1 + 2x(1-q) = (q-1)(q+1-2x) =$

$= (q-1)(q+1-(1+q)^2) = q(1-q^2)$. 5 bodova

Ako je aritmetički niz rastući onda je $d > 0$, tj. $q(1-q^2) > 0$. Zbog $q > 0$ dobivamo $1 - q^2 > 0$, odnosno $q \in (0,1)$. 5 bodova

3. Kako su točke $A_i(x_i, y_i)$ $\; i = 1,2,3,4$ na hiperboli i na kružnici, (x_i, y_i), $\; i = 1,2,3,4$ su rješenja sustava

$xy = 1$,

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. 5 bodova

Uvrštavanjem $y = \frac{1}{x}$ u drugu jednadžbu dobijemo

$x^2 + \frac{1}{x^2} + Ax + B\frac{1}{x} + C = 0$, $\quad$ odnosno

$x^4 + Ax^3 + Cx^2 + Bx + 1 = 0$. 5 bodova

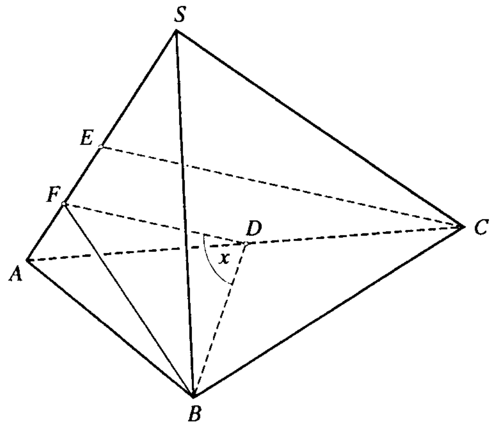
Rješenja ove jednadžbe su x_1, x_2, x_3, x_4 pa slijedi

$x^4 + Ax^3 + Cx^2 + Bx + 1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$. 10 bodova

Uspoređivanjem slobodnih članova na lijevoj i desnoj strani jednakosti imamo

$1 = x_1 x_2 x_3 x_4$. 5 bodova

4. Prvo rješenje:



Neka je točka F na bridu $\overline{AS}$ takva da je $FD \parallel EC$. Kut x kojeg tražimo izračunat ćemo iz trokuta BDF. 5 bodova

$|BD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$|FD| = \frac{1}{2}|EC| = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, ($\overline{FD}$ je srednjica trokuta AEC). 5 bodova

Duljinu $|FB|$ ćemo izračunati iz pravokutnog trokuta FEB, pravi kut je kod vrha E :

$|FB| = \sqrt{|FE|^2 + |EB|^2} = \sqrt{(\frac{a}{4})^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. 10 bodova

Prema kosinusovom teoremu je

$\cos x = \frac{|BD|^2+|FD|^2-|FB|^2}{2|BD|\cdot|FD|} = \frac{1}{6}$.

Sada je $x = \arccos\frac{1}{6} \approx 80°24'$. 5 bodova

Drugo rješenje:

Izrazimo $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{EC}$ pomoću $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ i $\overrightarrow{SC}$:

$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) =$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$, 5 bodova

$\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. 5 bodova

Možemo uzeti da je $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = 1$. Onda je $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. 5 bodova

Zato je $\cos x = \dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{EC}|} = \ldots = \frac{1}{6}$

i $x = \arccos x = 80°24'$. 10 bodova