

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
16. ožujka 1996. godine

7. razred

1. Biciklist se penje uzbrdo brzinom 10 km na sat, a spušta na polazno mjesto brzinom 15 km na sat. Razlika vremena uspinjanja i spuštanja je 12 minuta. Kolika je duljina puta uzbrdo?
2. Zbroj tri razlomka je $\frac{83}{72}$, pri čemu se njihovi brojnici odnose kao 5 : 7 : 1. Nazivnik trećeg razlomka odnosi se prema nazivniku prvog razlomka kao 1 : 4, a nazivnik drugog razlomka prema nazivniku trećeg razlomka odnosi se kao 3 : 2. Odredi te razlomke, ako su oni do kraja skraćeni.
3. Nevenka je pročitala knjigu za 4 dana. Drugi dan je pročitala 20% više nego prvi dan, ali je i svaki sljedeći dan pročitala 20% više nego prethodni dan. Koliko stranica ima knjiga, ako je zbroj stranica koje je Nevenka pročitala prvi i četvrti dan za 11 veći od zbroja stranica koje je pročitala drugi i treći dan?
4. Dan je šiljastokutni trokut ABC . Točka D je nožište visine iz vrha C na stranicu \overline{AB} , a točka E je nožište visine iz vrha A na stranicu \overline{BC} . Dokaži da je $\angle CAE + \angle ACD = \angle ABC$.
5. Dokaži da su polovišta stranica romba vrhovi pravokutnika.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

196 OPĆ.

ODREĐENIM NAČINOM RJEŠAVANJA ZADATAKA (KOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I Taj postupak BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x duljina puta uzbrdo, odnosno nizbrdo. Tada je biciklist udaljenost uzbrdo prešao za $\frac{x}{10}$ sati, a nizbrdo za $\frac{x}{15}$ sati. 2 boda
 Zato vrijedi jednačba $\frac{x}{10} - \frac{x}{15} = \frac{12}{60}$ 4 boda
 Rješenje ove jednačbe je $x = 6$ 3 boda
 Duljina puta uzbrdo je 6 km. 1 bod

UKUPNO 10 bodova

2. Neka je $\frac{x}{a}$ prvi razlomak, $\frac{y}{b}$ drugi i $\frac{z}{c}$ treći razlomak. Tada je $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{83}{72}$ 1 bod
 Odnose brojnika možemo zapisati produženim razmjerom $x : y : z = 5 : 7 : 1$, odnosno vrijedi da je $x : z = 5 : 1$, tj. $x = 5z$, odnosno $y : z = 7 : 1$, tj. $y = 7z$ 1 bod
 Odnose nazivnika možemo zapisati razmjerima $c : a = 1 : 4$, tj. $a = 4c$, odnosno $b : c = 3 : 2$, ili $2b = 3c$, tj. $b = \frac{3c}{2}$ 1 bod
 Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u prvu jednakost dobivamo redom

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{83}{72}, \quad \frac{5z}{4c} + \frac{7z}{\frac{3}{2}c} + \frac{z}{c} = \frac{83}{72}, \quad \frac{5z}{4c} + \frac{14z}{3c} + \frac{z}{c} = \frac{83}{72}$$

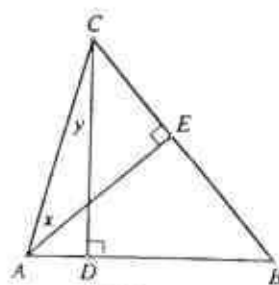
- Sad je nužno $z = 1$ i $c = 6$ 1 bod
 Zašto je $x = 5, y = 7, a = 24, b = 9$ 1 bod
 Prema tome, traženi su razlomci $\frac{x}{a} = \frac{5}{24}, \frac{y}{b} = \frac{7}{9}, \frac{z}{c} = \frac{1}{6}$ 2 boda

UKUPNO 10 bodova

3. Neka je x broj stranica koje je Nevenka pročitala prvi dan. Onda je drugi dan pročitala $1.2x$ stranica, treći dan $1.44x$ stranica i četvrti dan $1.728x$ stranica. 4 boda
 Zato vrijedi jednačba $x + 1.728x = 1.2x + 1.44x + 11$ 2 boda
 Rješenje ove jednačbe je $x = 125$ 2 boda
 Nevenka je prvi dan pročitala 125, drugi dan 150, treći dan 180, a četvrti dan 216 stranica. 1 bod
 Knjiga ima 671 stranica. 1 bod

UKUPNO 10 bodova

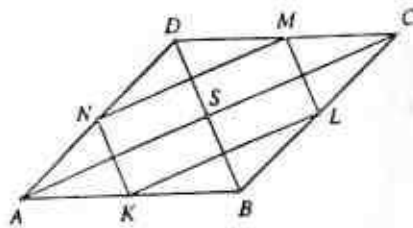
4. Skica:



sl.7-4.

- 1 bod
 Neka je $\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma, \angle CAE = x, \angle ACD = y$. U pravokutnom trokutu AEC vrijedi $x + \gamma = 90$, a u pravokutnom trokutu ADC vrijedi $y + \alpha = 90$ 2 boda
 Zbrajanjem ove dvije jednakosti dobivamo $x + y + \alpha + \gamma = 180$, a zbog $\alpha + \beta + \gamma = 180$ dobivamo novu jednakost $x + y + \alpha + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$, ili $x + y = \beta$, odakle je $\angle CAE + \angle ACD = \angle ABC$.
 7 bodova

UKUPNO 10 bodova



..... 1 bod
 Neka je četverokut $ABCD$ romb, a točke K, L, M, N redom polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i \overline{AD} , te neka je točka S sjecište dijagonale \overline{AC} i dijagonale \overline{BD} . Očito je dužina \overline{NK} srednjica trokuta ABD , a dužina \overline{ML} srednjica trokuta BCD , pa je $NK \parallel BD$, odnosno $ML \parallel BD$, iz čega slijedi da je $NK \parallel ML$ 2 boda
 U trokutu ABC srednjica je dužina \overline{KL} , a dužina \overline{MN} je srednjica trokuta ACD . Iz toga slijedi da je $KL \parallel AC$, odnosno $MN \parallel AC$, a to znači da je $KL \parallel MN$ (svojstvo tranzitivnosti paralelnih pravaca). 2 boda
 Iz toga slijedi da su stranice \overline{KL} i \overline{MN} paralelne, zaključujemo da je četverokut $KLMN$ paralelogram. 1 bod
 Kut $\angle NKL$ i kut $\angle ASB$ su dva kuta s međusobno usporednim krakima, a zbog $\angle ASB = 90^\circ$, jer su dijagonale romba međusobno okomite, nužno slijedi da je $\angle NKL = 90^\circ$ 2 boda
 Ako paralelogram ima jedan pravi kut, onda su nužno i ostala tri kuta prava, a to znači da je četverokut $KLMN$ pravokutnik. 2 boda

UKUPNO 10 bodova