MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

20. travnja 1996.

1. razred

1. Neka je (a_n) niz pozitivnih cijelih brojeva, takav da je $a_1 < a_2$ i $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ za $n \geq 1$. Ako je $a_7 = 120$, koliko je a_8?

2. Za koju vrijednost realnog parametra a jednadžba $|3 - 2|x|| = -\frac{3}{4}a$ ima točno tri rješenja?

3. U ravnini su dane dvije kružnice k_1 i k_2 na koje su povučene dvije unutarnje zajedničke tangente u, u' i dvije vanjske v, v'. Dokažite da sjecišta tangenata $u \cap v$, $u \cap v'$, $u' \cap v$, $u' \cap v'$ leže na jednoj kružnici.

4. Dokažite da su u svakoj bazi brojevnog sustava svi brojevi oblika 10101, 101010101, 1010101010101, ... složeni.

Rješenja zadataka za prvi razred

1. Prvo rješenje: Korištenjem rekurzivne relacije dobiva se

$$120 = a_7 = a_6 + a_5 = a_5 + a_4 + a_5 = 2a_5 + a_4$$

$$= 2(a_4 + a_3) + a_4 = 3a_4 + 2a_3 = 3(a_3 + a_2) + 2a_3 = 5a_3 + 3a_2$$

$$= 5(a_2 + a_1) + 3a_2 = 8a_2 + 5a_1.$$

Budući da su a_1 i a_2 pozitivni cijeli brojevi to mora biti $a_1, a_2 \geq 1$. 10 bodova

Iz jednakosti $8a_2 + 5a_1 = 120$ dobiva se da a_2 mora biti djeljiv s 5 i a_1 s 8. Zato a_2 može poprimati vrijednosti 5 ili 10. Za $a_2 = 5$ je $a_1 = 8$, što nije moguće zbog pretpostavke da je $a_1 < a_2$. Za $a_2 = 10$ je $a_1 = 8$. 10 bodova

Sada je $a_3 = 18$, $a_4 = 28$, $a_5 = 46$, $a_6 = 74$, $a_8 = a_7 + a_6 = 194$. 5 bodova

Drugo rješenje: Kao u prethodnom rješenju dobije se Diofantova jednadžba

$$5a_1 + 8a_2 = 120.$$

5 bodova

Jedno njezino partikularno rješenje je $a_1^\circ = 8$, $a_2^\circ = 10$. Opće rješenje je $a_1^n = 8 - 8t$, $a_2^n = 10 + 5t$, $t \in \mathbf{Z}$. 10 bodova

Iz $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ dobiva se $t < 1$, $t > -2$. Za $t = -1$ je $a_1 = 16$ i $a_2 = 5$, što nije moguće zbog pretpostavke $a_1 < a_2$. Za $t = 0$ je $a_1 = 8$, $a_2 = 10$. 5 bodova

Sada je $a_3 = 18$, $a_4 = 28$, $a_5 = 46$, $a_6 = 74$, $a_8 = 194$. 5 bodova

2. Najprije ćemo skicirati graf funkcije $f(x) = |3 - 2|x||$.

(a) Za $x \geq 0$ je $f(x) = |3 - 2x|$.

i. Za $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ je $f(x) = 3 - 2x$.

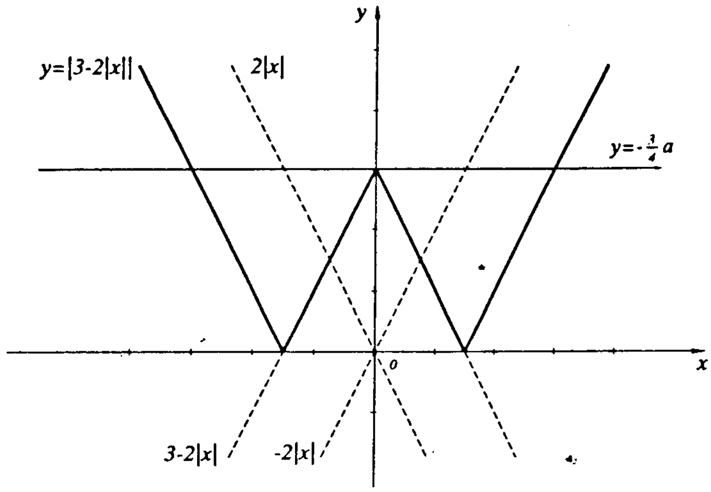
ii. Za $x \geq \frac{3}{2}$ je $f(x) = -3 + 2x$.

(b) Za $x \leq 0$ je $f(x) = |3 + 2x|$.

i. Za $-\frac{3}{2} \leq x \leq 0$ je $f(x) = 3 + 2x$.

ii. Za $x \leq -\frac{3}{2}$ je $f(x) = -3 - 2x$.

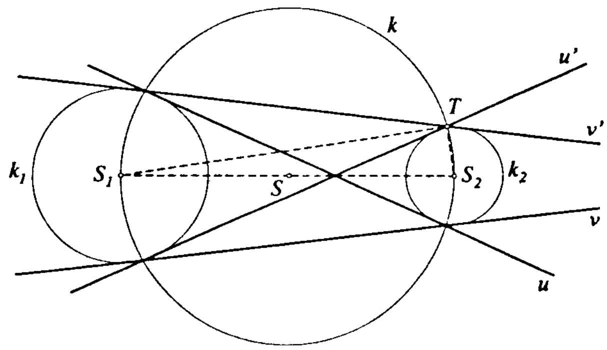
15 bodova



5 bodova

Sada treba naći parametar a takav da graf funkcije $f(x)$ siječe pravac $y = -\frac{3}{4}a$ u tri točke. To je moguće samo ako je $-\frac{3}{4}a = 3$ tj. $a = -4$. 5 bodova

3.



slika 5 bodova

Neka je $T = u' \cap v'$. Tada su TS_1 i TS_2 simetrale kuta $\angle(u', v')$, pa je $S_1T \perp S_2T$. To znači da se sve četiri točke nalaze na kružnici kojoj je $\overline{S_1S_2}$ promjer. 20 bodova

4. Vrijednost općeg broja je

$$1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{4n-2} + x^{4n} = \frac{1 - x^{4n+2}}{1 - x^2} \qquad \text{10 bodova}$$

$$= \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x} \cdot \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x} = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n})(1 - x + x^2 - \ldots + x^{2n}),$$

a ovo je složen broj. 15 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

20. travnja 1996.

2. razred

1. Učenik je iz jednadžbe $(x+3)(2-x)=4$ zaključio da je ili $x+3=4$ ili $2-x=4$, tj. da je $x=1$ ili $x=-2$. Iako je zaključivanje pogrešno, rješenje je ispravno. Odredite r $(r \neq 0)$, tako da se za dane brojeve p i q istim zaključivanjem iz jednadžbe $(x+p)(q-x)=r$ dobije ispravno rješenje.

2. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi takvi da je $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ i $z_1+z_2+z_3=0$. Dokažite da izraz

$$|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$$

poprima jednu te istu vrijednost za svaki izbor kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju gornje uvjete.

3. Tangente povučene iz točke T na kružnicu diraju je u točkama A i B. Neka je C na kružnici, različita od B, takva da je $|AB|=|AC|$. Dokažite da je $\angle TCB \leq 30°$.

4. Među točkama (x,y) koordinatne ravnine za koje je

$$\log_{x^2+y^2}(x+y) \geq 1$$

odredite onu koja ima najveću apscisu.

Rješenja zadataka za drugi razred
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Prvo rješenje: Promatrana kvadratna jednadžba ima oblik

$$x^2 - (q-p)x + r - pq = 0. \qquad (1) \qquad \text{5 bodova}$$

Učenikovo zaključivanje bi dalo da je ili $x + p = r$ ili $q - x = r$, tj. rješenja su $x_1 = r - p$ i $x_2 = q - r$. Da bi to bila rješenja jednadžbe (1) mora biti $x_1 + x_2 = q - p$, što je istina, te $x_1 x_2 = r - pq$, tj.

$$(r-p)(q-r) = r - pq, \qquad \text{15 bodova}$$

ili zapisano u ekvivalentnom obliku

$$r(p+q-r-1) = 0.$$

Odavde zbog $r \neq 0$, slijedi $r = p + q - 1$. 5 bodova

Drugo rješenje: Učenikovo rješenje daje $x + p = r$ ili $q - x = 1$, odnosno, $q - x = 1$ ili $x + p = 1$. U prvom slučaju dobiva se $x = r - p$ i $x = q - 1$ tj. $r = p + q - 1$. Isti zaključak slijedi i iz $q - x = r$ i $x + p = 1$.

25 bodova

2. Prvo rješenje: Koristit ćemo ova dva svojstva kompleksnih brojeva: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ i $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ za $z, w \in \mathbf{C}$.
Sada imamo

$$|z_1+z_2|^2 + |z_2+z_3|^2 + |z_3+z_1|^2$$

$$= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} + (z_2+z_3)\overline{(z_2+z_3)} + (z_3+z_1)\overline{(z_3+z_1)}$$

$$= (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) + (z_2+z_3)(\overline{z}_2+\overline{z}_3) + (z_3+z_1)(\overline{z}_3+\overline{z}_1).$$

10 bodova

Nakon množenja i grupiranja dobivamo da je polazni identitet jednak

$$z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + z_3\overline{z}_3 + (z_1+z_2+z_3)(\overline{z}_1+\overline{z}_2+\overline{z}_3) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 3.$$

15 bodova

Drugo rješenje: Stavimo $z_k = x_k + iy_k$, $\quad k = 1, 2, 3$. Prema uvjetu zadatka je $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ i $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. 5 bodova
Sada je

$$|z_1+z_2|^2 + |z_2+z_3|^2 + |z_3+z_1|^2$$

$$= (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + (y_2+y_3)^2 + (x_3+x_1)^2 + (y_3+y_1)^2.$$

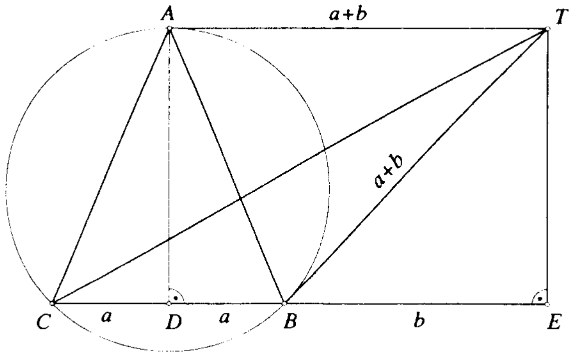
5 bodova

Nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo da je polazni izraz jednak

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + (x_1+x_2+x_3)^2 + (y_1+y_2+y_3)^2 = 3.$$

15 bodova

3.



Neka je D nožište visine trokuta ABC spuštene iz vrha A. Budući da je pravac AT tangenta na kružnicu, mora biti $AD \perp AT$. Neka je točka E takva da je $ADET$ pravokutnik. Nadalje, označimo $a = |BD|$ i $b = |BE|$. Tada je $|CD| = a$ i $|BT| = a + b$. 5 bodova

Tvrdnja zadatka ekvivalentna je ovoj

$$|CE| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|CT| \quad \text{tj.} \quad |CE|^2 \geq \frac{3}{4}|CT|^2. \qquad (1) \qquad \text{5 bodova}$$

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute CTE i BTE dobivamo

$$|CT|^2 = |CE|^2 + |ET|^2 = |CE|^2 + (|BT|^2 - |BE|^2)$$

$$= (2a + b)^2 + (a + b)^2 - b^2 = 5a^2 + 6ab + b^2. \qquad \text{10 bodova}$$

Nejednakost (1) je sada ekvivalentna nejednakosti

$$(2a + b)^2 \geq \frac{3}{4}(5a^2 + 6ab + b^2),$$

tj.

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, \quad (a - b)^2 \geq 0$$

što je uvijek ispunjeno. Time je dokazana tvrdnja zadatka. 5 bodova

4. Uređeni par (x, y) zadovoljava polaznu nejednadžbu ako i samo ako zadovoljava jedan od sljedećih sistema nejednadžbi:

$x^2 + y^2 > 1, \quad x + y \geq x^2 + y^2 \qquad (1)$ 5 bodova

$0 < x^2 + y^2 < 1, \quad 0 < x + y \leq x^2 + y^2$ 5 bodova

Nađimo najprije točku (x, y) s najvećom apscisom koja zadovoljava sistem (1). Promatrajmo drugu nejednadžbu sistema (1) kao nejednadžbu po varijabli y

$y^2 - y + (x^2 - x) \leq 0.$

Ona ima rješenje ako i samo ako je $D = 1 - 4(x^2 - x) \geq 0$, tj. ako i samo ako je $4x^2 - 4x - 1 \leq 0$. Rješenje ove nejednadžbe je $x \in [\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}]$. Dakle, najveća vrijednost apscise je $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Ako nju uvrstimo u drugu nejednadžbu sistema (1), dobijemo $4y^2 - 4y + 1 \leq 0$, tj. $(2y - 1)^2 \leq 0$, što zadovoljava samo $y = \frac{1}{2}$. Dakle, točka $(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ je točka s najvećom apscisom koja zadovoljava drugu nejednadžbu sistema (1). Ova točka ujedno zadovoljava i prvu nejednadžbu sistema (1). 10 bodova

Promatrajmo sada sistem (2). Za sve točke (x, y) koje zadovoljavaju sistem (2) je $x < 1$, pa zato među rješenjima ovog sistema nejednadžbi nema nijedno rješenje čija apscisa je veća od $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. 5 bodova

Zato je tražena točka $(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

20. travnja 1996. godine

3. razred

1. Za $k \in \mathbf{N}$ označimo sa $f(k)$ prirodan broj najbliži broju $\sqrt[4]{k}$. Neka je dan $m \in \mathbf{N}$. Koliko ima prirodnih brojeva n za koje je $f(n) = m$?

2. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC leže redom točke N, L i M, pri čemu je $\overline{AN}$ visina, AL simetrala kuta $\angle CAB$ i $\overline{AM}$ težišnica. Ako je $\angle NAB = \angle LAN = \angle MAL = \angle CAM$, odredite kutove trokuta.

3. Duljine stranica trokuta su $a = t^2 + t + 1$, $b = t^2 + 2t$ i $c = 2t + 1$, gdje je t pozitivan realan broj.

   (a) Poredajte te duljine po veličini.

   (b) Dokažite da je $\alpha = 60°$.

   (c) Izračunajte polumjere R i r opisane i upisane kružnice tog trokuta i nađite najmanji mogući omjer $\frac{R}{r}$.

   (d) Nađite vrijednosti t za koje je trokut pravokutan.

4. Kut između visine pravilne četverostrane piramide i pobočke je $\delta = 30°$. Promatrajte ravninu koja sadrži jedan brid osnovice i okomita je na nasuprotnu pobočku. Nađite omjer volumena dijelova na koje ta ravnina dijeli piramidu.

Rješenja zadataka za treći razred
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Primijetimo da je $f(n) = m$ za prirodne brojeve između $(m - \frac{1}{2})^4$ i $(m + \frac{1}{2})^4$. 8 bodova
Takvih brojeva ima $[(m + \frac{1}{2})^4] - [(m - \frac{1}{2})^4]$ gdje smo s $[x]$ označili najveći cijeli broj koji nije veći od x. 5 bodova

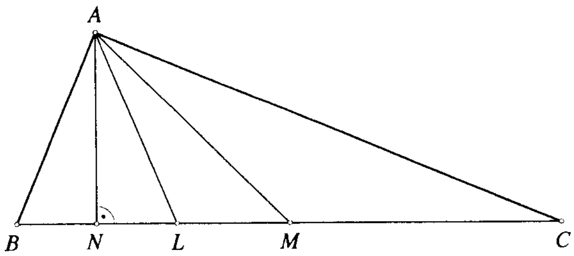
$$[(m + \frac{1}{2})^4] = [m^4 + 2m^3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{16}]$$

$$= [m^4 + 2m^3 + \frac{(3m+1)m}{2} + \frac{1}{16}] = m^4 + 2m^3 + \frac{(3m+1)m}{2}$$

(jer je $(3m+1)m$ paran broj).
Slično je $[(m - \frac{1}{2})^4] = m^4 - 2m^3 + \frac{(3m-1)m}{2}$, 7 bodova
pa je rješenje

$$[(m + \frac{1}{2})^4] - [(m - \frac{1}{2})^4] = 4m^3 + m. \qquad \text{5 bodova}$$

2.



Primjenom sinusovog poučka na $\triangle ALM$ dobije se

$$\frac{|AM|}{\sin \angle ALM} = \frac{|AL|}{\sin \angle LMA}. \qquad \text{5 bodova}$$

Lako se vidi da je $\angle ALM = 90° + \frac{\alpha}{4}$, $\angle LMA = 90° - \frac{\alpha}{2}$ i $|AL| = |AB| = c$. Odavde dobivamo

$$|AM| = \frac{c \cdot \cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}. \qquad \text{5 bodova}$$

Točka M je polovište stranice $\overline{BC}$, pa je $P(ABC) = 2P(AMC)$, 5 bodova
odnosno

$$\frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = |AM| \cdot b \cdot \sin\frac{\alpha}{4}. \qquad \text{3 boda}$$

Iz ovih jednakosti dobivamo

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{tj.} \quad 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad \alpha = 90°. \qquad \text{5 bodova}$$

Odavde, napokon, slijedi

$$\beta = 90° - \frac{\alpha}{4} = 67°30', \quad \gamma = 90° - \beta = 22°30'. \qquad \text{2 boda}$$

3. (a) Primijetimo da je
$a = (t+1)^2 - t, \quad b = (t+1)^2 - 1, \quad c = (t+1)^2 - t^2,$
pa je
$b < a < c$ za $t < 1$, $c < a < b$ za $t > 1$, $a = b = c$ za $t = 1$. 2 boda
(b)

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(t^2+2t)^2 + (2t+1)^2 - (t^2+t+1)^2}{2(t^2+2t)(2t+1)}$$

što nakon sređivanja daje $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, odnosno $\alpha = 60°$. 3 boda
(c) $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{t^2+t+1}{\sqrt{3}}$, 2 boda
$r = \frac{bc\sin\alpha}{2s} = \frac{(t^2+2t)(2t+1)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2(2t^2+5t+2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}t.$ 2 boda

$\frac{R}{r} = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^2+t+1}{t} = \frac{2}{3}(t + \frac{1}{t} + 1)$.

Zbog $t + \frac{1}{t} \geq 2$ je $\frac{R}{r} \geq 2$. 4 boda

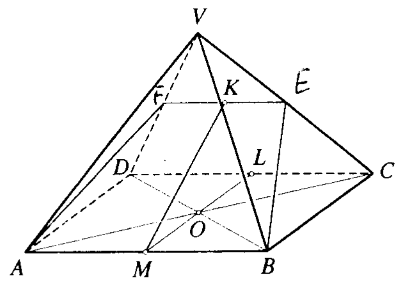
Minimalni omjer $\frac{R}{r} = 2$ postiže se za $t = 1$, odnosno $a = b = c = 3$. 2 boda

(d) Kako je $\alpha = 60°$ i trokut je pravokutan, njegovi kutovi su 30°, 60° i 90°, a duljine odgovarajućih stranica su u omjeru $1 : \sqrt{3} : 2$.

Za $t < 1$ je $2b = c$, odnosno $2t^2 + 4t = 2t + 1$ tj. $t = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (drugo rješenje otpada jer mora biti $t \in \mathbf{R}^+$).

Za $t < 1$ je $b = 2c$, pa je $t^2 + 2t = 4t + 2$, tj. $t = 1 + \sqrt{3}$. 10 bodova

4. Neka je $ABCD$ baza piramide, V njezin vrh, O središte baze, M polovište brida $\overline{AB}$, L polovište od $\overline{CD}$, K nožište okomice iz M na VL (tj. na plohu CDV) i neka ravnina presjeka prolazi kroz točke E i F na bridovima $\overline{CV}$ i $\overline{DV}$, kako slijedi.



Promatrajmo najprije presjek piramide ravninom kroz V, L i M.
Iz $\angle LVO = \delta = 30°$ slijedi $\angle MLV = \angle LVM = 60°$, pa je trokut LVM jednakostraničan. Zato je

$$|VL| = a, \quad |VK| = |KL| = \frac{a}{2} \quad \text{i} \quad |MK| = |VO| = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \qquad \text{5 bodova}$$

Sada iz trokuta CDV, zbog $|VK| = \frac{1}{2}|VL|$, zaključujemo

$$|EF| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{a}{2}. \qquad \text{5 bodova}$$

Sada možemo izračunati površinu trapeza $ABEF$:

$$P_{ABEF} = \frac{|AB| + |EF|}{2} \cdot |MK| = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}. \qquad \text{5 bodova}$$

Volumen piramide $ABCDV$ je

$$V_{ABCDV} = \frac{1}{3}P_{ABCD} \cdot |VO| = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}. \qquad \text{3 boda}$$

Volumen piramide $ABEFV$ je

$$V_{ABEFV} = \frac{1}{3}P_{ABEF} \cdot |VK| = \frac{a^3\sqrt{3}}{16} \qquad \text{3 boda}$$

Stoga je volumen tijela $ABCDEF$

$$V_{ABCDEF} = V_{ABCDV} - V_{ABEFV} = \frac{5}{48}a^3\sqrt{3}. \qquad \text{2 boda}$$

Traženi omjer iznosi

$$\frac{V_{ABEFV}}{V_{ABCDEF}} = \frac{3}{5}. \qquad \text{2 boda}$$

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

20. travnja 1996. godine

4. razred

1. Točka T se giba po koordinatnoj ravnini tako da je produkt njezinih udaljenosti od pravaca $4x - 3y + 11 = 0$ i $4x + 3y + 5 = 0$ jednak $\frac{144}{25}$. Nađite jednadžbu geometrijskog mjesta točaka T i skicirajte taj skup u koordinatnoj ravnini.

2. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut. Translacijama za vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ dobivamo četiri nova peterokuta. Dokažite da među tih pet peterokuta postoje dva koja imaju barem jednu zajedničku unutarnju točku.

3. U trokutu $A_1A_2A_3$ označimo $a_1 = |A_2A_3|$, $a_2 = |A_1A_3|$, $a_3 = |A_1A_2|$. Duljine visina tog trokuta iz vrhova A_1, A_2, A_3 označimo redom sa v_1, v_2, v_3. Promatrajmo sve brojeve oblika $a_1v_i + a_2v_j + a_3v_k$ gdje je (i, j, k) bilo koja permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$. Nađite najmanji od tih brojeva i izrazite ga pomoću površine P trokuta $A_1A_2A_3$.

4. Neka je $a \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ i $n \in \mathbf{N}$. Odredite sumu

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} a^i a^j.$$

Rješenja zadataka za četvrti razred:
Svaki zadatak nosi po 25 bodova.

1. Neka je $P(x, y)$ neka od tih točaka. Tada je

$$\frac{4x-3y+11}{\pm 5} \cdot \frac{4x+3y+5}{\pm 5} = \frac{144}{25}.$$

(a) Ako je $\frac{4x-3y+11}{5} \cdot \frac{4x+3y+5}{5} = \frac{144}{25}$, onda je

$$16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 0. \quad \text{tj.} \qquad \text{5 bodova}$$

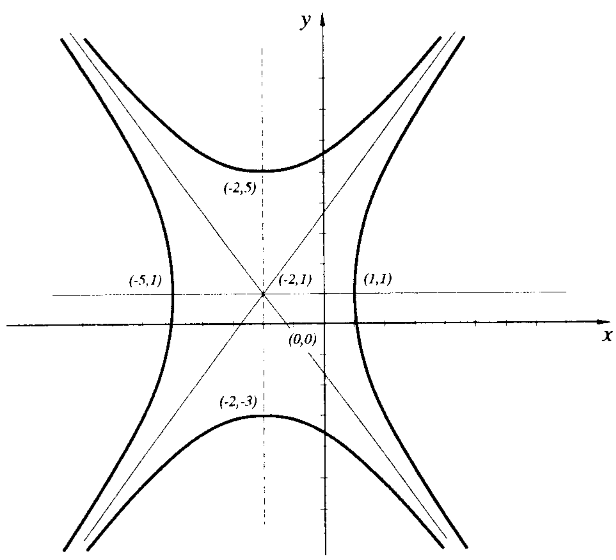
$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1. \qquad \text{5 bodova}$$

(b) Ako je $\frac{4x-3y+11}{5} \cdot \frac{4x+3y+5}{5} = -\frac{144}{25}$ onda je

$$16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y + 199 = 0. \quad \text{tj.} \qquad \text{5 bodova}$$

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1. \qquad \text{5 bodova}$$

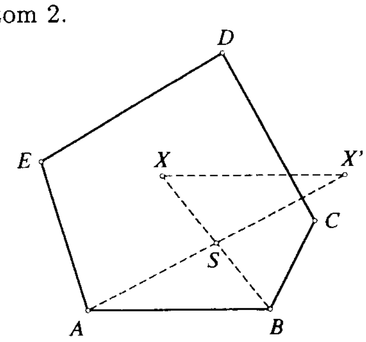
Jednadžbama pod (a) i (b) dane su jednadžbe traženog geometrijskog mjesta točaka. Središte tih hiperbola je točka $O'(-2, 1)$.



5 bodova

(Napomena: Ako učenik nacrta samo jednu hiperbolu, skicu bodovati s 2 boda.)

2. Prvo rješenje: Pokazat ćemo da svih pet peterokuta leži u peterokutu koji se dobiva iz polaznog homotetijom iz točke A s koeficijentom 2. 5 bodova



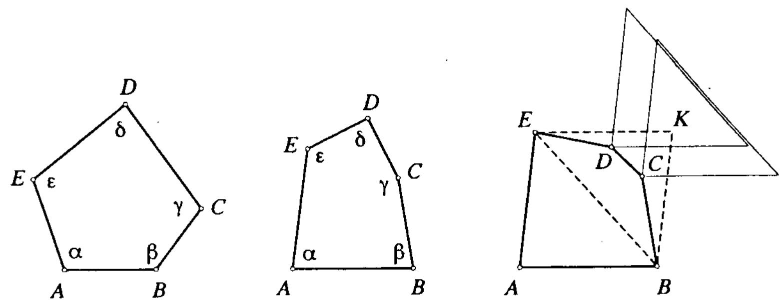
Neka je točka X u unutrašnjosti polaznog peterokuta i X' u unutrašnjosti peterokuta koji se dobiva iz polaznog translacijom za vektor $\overrightarrow{AB}$ takav da je $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$. Tada je $ABX'X$ paralelogram pa su točke A, X' i B, X centralno simetrične s obzirom na sjecište S njegovih dijagonala. Točka X' se nalazi unutar peterokuta koji se dobiva iz polaznog homotetijom iz A s koeficijentom 2.

Površina velikog peterokuta je četiri puta veća od površine svakog od manjih, kojih ima pet. Po Dirichletovom principu postoji barem jedna točka koja je u unutrašnjosti barem dva manja peterokuta.
20 bodova

Drugo rješenje:

Neka su α, β, γ, δ, ϵ unutarnji kutevi peterokuta P uz vrhove A, B, C, D, E, kako slijedi.

(a) Ako je $\alpha+\beta > \pi$, onda je $t_{\overrightarrow{AB}}P$ i P imaju zajedničku unutarnju točku. Isto tako, ako je $\alpha+\epsilon > \pi$, onda $t_{\overrightarrow{AE}}P$ i P maju zajedničku unutarnju točku. 8 bodova



(a) (b) (c)

(b) Pretpostavimo da je nadalje $\alpha + \beta \leq \pi$ i $\alpha + \epsilon \leq \pi$.

Neka je $ABKE$ paralelogram. Ako je točka D izvan tog paralelograma (tj. ako je iznad stranice $\overline{EK}$ paralelograma) onda $t_{\overrightarrow{AD}}$ i P imaju zajedničku unutarnju točku. 8 bodova

(c) Pretpostavimo sada da su vrhovi C i D unutar ili na rubu paralelograma. U ovom slučaju presjek translatiranih trokuta $t_{\overrightarrow{AC}}(\triangle ABE)$ i
$t_{\overrightarrow{AD}}(\triangle ABE)$ sadrži unutarnju točku. 9 bodova

3. Ako je $(i,j,k) = (1,2,3)$ onda je

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 6P. \qquad \text{5 bodova}$$

U općem slučaju je

$$a_1v_i + a_2v_j + a_3v_k = 2P\left(\frac{a_1}{a_i} + \frac{a_2}{a_j} + \frac{a_3}{a_k}\right) \geq 2P \cdot 3\sqrt[3]{\frac{a_1}{v_i} \cdot \frac{a_2}{a_j} \cdot \frac{a_3}{a_k}} = 6P.$$

Najmanja vrijednost koja se postiže je, dakle, $6P$. 20 bodova

4. Ako od $(1 + a + a^2 + ... + a^n)^2$ oduzmemo "dijagonalne brojeve" tj. sumu $1 + a^2 + a^4 + ... + a^{2n}$, dobit ćemo dvostruku sumu. 10 bodova

Dakle, tražena suma je jednaka

$$\frac{1}{2}[(1 + a + a^2 + ... + a^n)^2 - (1 + a^2 + a^4 + ... + a^{2n})]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}\right)^2 - \frac{a^{2(n+1)} - 1}{a^2 - 1}\right] = \frac{a(a^n - 1)(a^{n+1} - 1)}{(a - 1)^2(a + 1)}.$$

15 bodova