MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
1. ožujka 1997. godine

6. razred

1. Umnožak tri uzastopna parna prirodna broja je 17472. Koji su to brojevi?

2. Ako od nekog broja oduzmemo $\frac{2}{5}$ tog broja, a zatim od dobivenog ostatka oduzmemo $\frac{4}{9}$ dobivenog ostatka i 195, preostali će broj biti za 124 veći od $\frac{2}{17}$ početnog broja. Odredi početni broj !

3. Za četiri broja znamo da je zbroj prvog i drugog broja 11, zbroj drugog i trećeg broja je 2.3, a zbroj trećeg i četvrtog broja je 8.4. Kolika je polovina zbroja prvog i četvrtog broja?

4. Dan je trokut ABC, pri čemu je $\angle CAB - \angle CBA = 30^\circ$. Koliki je kut što ga zatvaraju visina iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$ i simetrala vanjskog kuta pri vrhu C?

5. Dana su dva usporedna pravca a i b i pravac c koji siječe pravac a u točki A, te pravac b u točki B, pri čemu pravac c nije okomit na pravac a. Na pravcu b lijevo od točke B odabrana je točka D, a desno od točke B točka E. Simetrala kuta $\angle ABD$ siječe pravac a u točki M, a simetrala kuta $\angle ABE$ siječe pravac a u točki N.
Dokaži da je:

   (a) trokut MBN pravokutan,

   (b) $|AM| = |AN|$.

RJEŠENJA ZA 6. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ČLAN KOMISIJE JE DUŽAN I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Kako je $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$, a $30 \cdot 30 \cdot 30 = 27000$, zaključujemo da su traženi brojevi veći od 20, a manji od 30. 2 boda

   Od tri uzastopna parna broja jedan je sigurno djeljiv sa 4, a jedan sa 3, pa je umnožak tih brojeva djeljiv sa $2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3$, tj. sa 48.

   Sada lako zadani umnožak rastavimo na faktore. Naime, zbog $17472 : 48 = 364$, te $364 : 4 = 91$ i $91 = 7 \cdot 13$, vrijedi $17472 = 48 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 13$. 3 boda

   Zbog faktora 13 i 7, nužno je jedan broj 26, a drugi 28. 2 boda

   Traženi su brojevi 24, 26 i 28. 3 boda

   .... UKUPNO 10 bodova

2. Ako od broja x oduzmemo $\frac{2}{5}$ tog broja ostane $\frac{3}{5}$ tog broja, tj. $\frac{3}{5}x$. 2 boda

   Od tog rezultata oduzimamo $\frac{4}{9}$ dobivenog ostatka i 195, tj. $\frac{3}{5}x - \frac{4}{9}(\frac{3}{5}x) - 195$, što je jednako $\frac{1}{3}x - 195$. 2 boda

   Sada vrijedi $\frac{1}{3}x - 195 = \frac{2}{17}x + 124$. 4 boda

   Početni broj je 1479. 2 boda

   .... UKUPNO 10 bodova

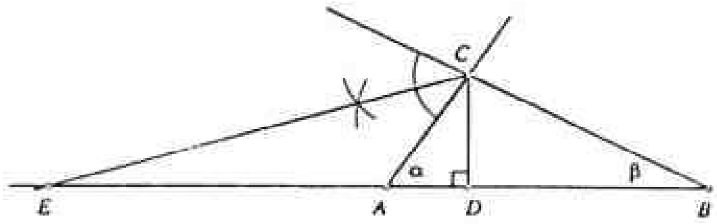
3. Neka je a prvi broj, b drugi, c treći i d četvrti broj. Tada vrijede ove jednakosti: $a + b = 11$, $b + c = 2.3$, $c + d = 8.4$. 3 boda

   Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo redom $a + 2b + 2c + d = 21.7$, odnosno $a + 2(b + c) + d = 21.7$, $a + 2 \cdot 2.3 + d = 21.7$, $a + 4.6 + d = 21.7$, tj. $a + d = 17.1$. 5 bodova

   Zato je polovina zbroja prvog i četvrtog broja 8.55. 2 boda

   .... UKUPNO 10 bodova

4. Skica



2 boda

Neka je $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, kut γ_1 vanjski kut kod vrha C, točka D nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, točka E presjek simetrale vanjskog kuta kod vrha C i pravca AB i neka je $\angle ECD = x$. Tada je $\alpha - \beta = 30°$ ili $\alpha = \beta + 30°$, $\angle ACD = 90° - \alpha$, jer je trokut ADC pravokutan, $\angle ACE = \frac{\gamma_1}{2}$. 1 bod

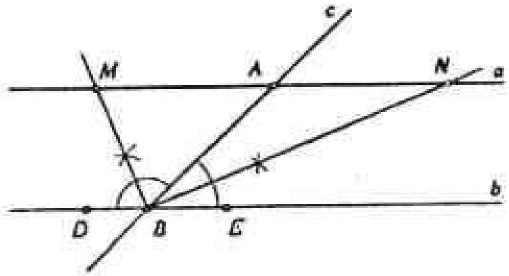
Dalje vrijede redom ove jednakosti: $x = \frac{\gamma_1}{2} + 90° - \alpha$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + 90° - \alpha$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + 90° - (\beta + 30°)$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + 90° - \beta - 30°$, $x = \frac{\alpha+\beta}{2} + 60° - \beta$, $x = \frac{\alpha+\beta+120°-2\beta}{2}$, $x = \frac{\alpha-\beta+120°}{2}$, $x = \frac{30°+120°}{2}$, $x = 75°$. 5 bodova

Kut $\angle ECD$ je $75°$. 2 boda

Ukoliko je učenik dobio $105°$ taj rezultat je također ispravan i boduje se sa 2 boda.

.... UKUPNO 10 bodova

5. Skica



1 bod

(a) Neka je $\angle ABD = \alpha$ i $\angle ABE = \beta$. Tada je $\angle ABM = \frac{\alpha}{2}$ i $\angle ABN = \frac{\beta}{2}$. Kako je $\alpha + \beta = 180^\circ$, jer su to dva sukuta, slijedi da je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$, tj. $\angle MBN = 90^\circ$, pa je trokut MBN pravokutan. 3 boda

(b) Očito je $\angle DBM = \angle AMB$, jer su to kutovi uz presječnicu, a zbog $\angle DBM = \angle ABM$ (po definiciji simetrale), slijedi da je $\angle AMB = \angle ABM$, a to znači da je trokut AMB jednakokračan, pa je $|AM| = |AB|$. 2 boda
Kako je $\angle EBN = \angle ANB$ i $\angle EBN = \angle ABN$, slijedi da je $\angle ANB = \angle ABN$, pa je $|AB| = |AN|$. 2 boda
Iz $|AM| = |AB|$ i $|AB| = |AN|$ slijedi da je $|AM| = |AN|$. 2 boda

UKUPNO 10 bodova