ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 7. – 10. svibnja 1998. godine

I. razred

1. Što je veće

$$A=\frac{2.00...004}{(1.00...004)^2+2.00...004}\quad \text{ili}\quad B=\frac{2.00...002}{(1.00...002)^2+2.00...002},$$

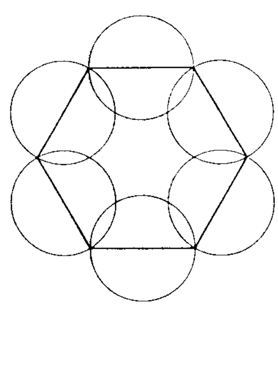
gdje u svakom broju u brojniku i nazivniku ima po 1998 nula?

2. Nađite sve prirodne brojeve m i n koji zadovoljavaju jednadžbu

$$10(m+n)=mn.$$

3. Ivan i Krešo, pošli su istodobno iz Crikvenice u Kraljevicu, čija je udaljenost 15 km, a Marko je u isto vrijeme krenuo iz Kraljevice u Crikvenicu. Sva trojica imala su jedan bicikl i put su prevaljivali pješačenjem brzinom od 5 km/h ili biciklom brzinom od 15 km/h. Ivan je pošao pješice, dok je Krešo vozio bicikl sve dok se nije sreo s Markom. Tada je Krešo dao bicikl Marku i nastavio put prema Kraljevici pješice, a Marko je nastavio put prema Crikvenici biciklom. Kada je sreo Ivana dao mu je bicikl i ovaj je vozeći se stigao u Kraljevicu, dok je Marko pješice nastavio put do Crikvenice. Koliko vremena je svaki od njih trebao da dođe do svog cilja, koliko je pješačio, a koliko vozio bicikl?

4. Izračunajte površinu šrafiranog lika na slici ako stranica pravilnog šesterokuta ima duljinu a.



Rješenja za I. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

1. Stavljajući $x = 2 \cdot 10^{-1999}$ možemo brojeve A i B zapisati u obliku

$$A = \frac{2+2x}{(1+2x)^2+2+2x}, \quad B = \frac{2+x}{(1+x)^2+2+x}.$$

Sada računamo $A - B$:

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{(2+2x)(3+3x+x^2)-(2+x)(3+6x+4x^2)}{(3+3x+x^2)(3+6x+4x^2)} \\ &= \frac{-2x^3-6x^2-3x}{(3+3x+x^2)(3+6x+4x^2)} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A < B.$$

2. Jednadžbu zapišimo kao

$$mn - 10m - 10n + 100 = 100,$$

odnosno

$$(m-10)(n-10) = 100.$$

Sada imamo ~~ove četiri~~ ovih pet mogućnosti:

1° Jedan od faktora na lijevoj strani je 1, a drugi 100. To daje rješenja $(m,n) = (11,110)$ i $(m,n) = (110.11)$.

2° Jedan od faktora na lijevoj strani je 2, a drugi 50. Ovo daje rješenja $(m,n) = (12,60)$ i $(m,n) = (60,12)$.

3° Jedan od faktora na lijevoj strani je 4, a drugi 25. Ovo daje rješenja $(m,n) = (14,35)$ i $(m,n) = (35,14)$.

4° Jedan od faktora na lijevoj strani je 5, a drugi 20. Nova rješenja su $(m,n) = (15,30)$ i $(m,n) = (30,15)$.

5° Oba faktora na lijevoj strani su jednaka 10, što daje preostalo rješenje $(m,n) = (20,20)$.

3. Krešo je vozio bicikl tokom vremena t_1 dok se nije sreo s Markom. Ako je $s = 15$ km onda je

$$15t_1 + 5t_1 = s, \quad \text{tj.} \quad t_1 = \frac{3}{4} \text{ h}.$$

Za to vrijeme Krešo je prevalio put $s_1 = |AC| = 15 \cdot \frac{3}{4} = \frac{45}{4}$ km, a Marko put $s_2 = \frac{15}{4}$ km. Za to vrijeme Ivan je došao do točke D koja je od A udaljena $s_2 = \frac{15}{4}$ km. Da bi došao do Kraljevice, Krešo je još morao pješačiti tokom vremena t_1.

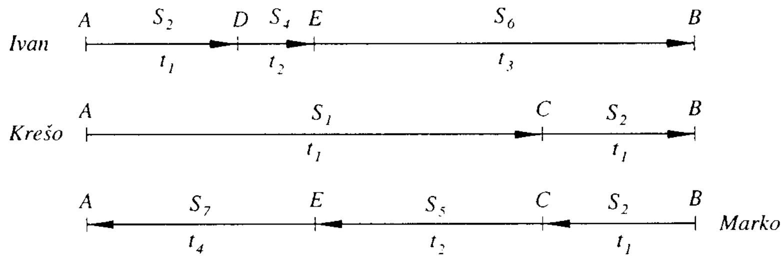
U trenutku t_1 Ivan i Marko su bili udaljeni $s_3 = 15 - 2s_2 = \frac{15}{2}$ km. Nakon tog trenutka oni će se sresti za vrijeme t_2 pri čemu će Ivan prevaliti put $s_4 = 5t_2$, a Marko put $s_5 = 15t_2$ pri čemu će suma tih putova biti jednaka s_3. Sada je

$$5t_2 + 15t_2 = \frac{15}{2} \quad \text{tj.} \quad t_2 = \frac{3}{8} \text{ h.}$$

Za to vrijeme Ivan će propješačiti put $s_4 = \frac{15}{8}$ km, a Marko će se voziti $s_5 = \frac{45}{8}$ km.

Ivanu je preostao put $s_6 = |EB| = s - s_2 - s_4 = \frac{75}{8}$ km koji je vozio tokom vremena $t_3 = \frac{75}{8} \cdot \frac{1}{15} = \frac{5}{8}$ h.

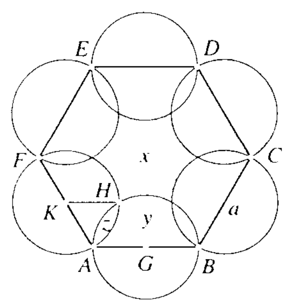
Marku je preostao put $s_7 = |AE| = s - s_2 - s_5 = \frac{45}{8}$ km koji je propješačio za vrijeme $t_4 = \frac{45}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{8}$ h.



Ivan je utrošio vrijeme $t_I = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{7}{4}$ h, Krešo — $t_K = 2t_1 = \frac{3}{2}$ h i Marko — $t_M = t_1 + t_2 + t_4 = \frac{9}{4}$ h.

Ivan je pješačio put duljine $5(t_1 + t_2) = \frac{45}{8}$ km i vozio bicikl $15t_3 = \frac{75}{8}$ km.
Krešo je pješačio $5t_1 = \frac{15}{4}$ km i vozio $15t_1 = \frac{45}{4}$ km.
Marko je pješačio $5(t_1 + t_4) = \frac{75}{8}$ km i vozio $15t_2 = \frac{45}{8}$ km.

4.



Označimo sa x, y i z površine dijelova kao na slici, pri čemu treba izračunati veličinu x.
Promatrajući romb $AGHK$ možemo izračunati z, koji je jednak razlici dvostruke površine šestine kruga polumjera $\frac{a}{2}$ i dvostruke površine jednakostraničnih trokuta stranice $\frac{a}{2}$. Dakle,

$$z = 2 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{a^2}{24}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Površina polovine kruga polumjera $\frac{a}{2}$ jednaka je $y + 2z$, tj.

$$y + 2z = \frac{1}{2} \cdot (\frac{a}{2})^2 \pi \quad \text{tj.} \quad y = \frac{a^2}{24}(6\sqrt{3} - \pi).$$

Površina čitavog šesterokuta je jednaka

$$x + 6y + 6z = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad \text{tj.} \quad x = \frac{a^2}{4}(3\sqrt{3} - \pi).$$

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 7. – 10. svibnja 1998. godine

II. razred

1. Riješite jednadžbu

$$2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i = 0$$

ako se zna da je jedno njezino rješenje realno.

2. Dokažite da za svaka dva realna broja $a \geq 0$ i $b \geq 0$ vrijedi nejednakost

$$\frac{a + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2} + b}{4} \leq \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3}.$$

3. Na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$ izabrane su točke E i F, tim redom, takve da je $|BE| = |BF|$. Neka je $\overline{BN}$ visina trokuta BCE. Dokažite da je trokut DNF pravokutan.

4. Neka su m i n prirodni brojevi, $a = (n+1)^m - n$ i $b = (n+1)^{m+3} - n$.

   (a) Dokažite da su a i b relativno prosti ako m nije djeljiv s 3.

   (b) Odredite sve brojeve m i n za koje a i b nisu relativno prosti.

Rješenja za II. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

1. Neka je $x_1 \in \mathbf{R}$ realno rješenje dane jednadžbe. Tada je

$$(2x_1^3 - 5x_1^2 + 1) + i(-6x_1^2 + 9x_1 - 3) = 0, \quad \text{tj.}$$

$$2x_1^3 - 5x_1^2 + 1 = 0 \quad \text{i} \quad -6x_1^2 + 9x_1 - 3 = 0.$$

Rješenje kvadratne jednadžbe koje zadovoljava i kubnu, je $x_1 = \frac{1}{2}$.

Dijeljenjem danog polinoma sa $z - \frac{1}{2}$ dobije se:

$$2z^3 - (5+6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i = 2(z - \frac{1}{2})(z^2 - (2+3i)z + 3i - 1).$$

Iz $z^2 - (2+3i)z + 3i - 1 = 0$ slijedi

$$z_{2,3} = \frac{2 + 3i \pm \sqrt{(2+3i)^2 - 4(3i-1)}}{2} = \frac{2 + 3i \pm i}{2},$$

odnosno $z_2 = 1 + 2i$ i $z_3 = 1 + i$.

2. Uvrštavajući $a = u^6$ i $b = v^6$ dobije se

$$\frac{u^6 + u^4v^2 + u^2v^4 + v^6}{4} \le \frac{u^6 + u^3v^3 + v^6}{3}.$$

Ova nejednakost je ispunjena za $v = 0$. Neka je, nadalje, $v \neq 0$. Množeći nejednakost sa $\frac{12}{v^6}$ i uvrštavajući $x = \frac{u}{v}$, nejednakost poprima ovaj oblik:

$$3x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 3 \le 4x^6 + 4x^3 + 4,$$

odnosno

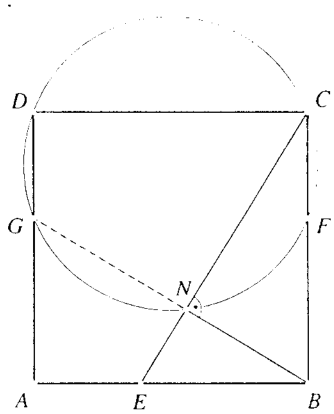
$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 \ge 0.$$

Dvostruka nulatočka polinoma s lijeve strane je 1, a faktorizacija daje

$$(x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) \ge 0.$$

Ovo je uvijek ispunjeno jer je $x = \frac{u}{v} \ge 0$, pa stoga vrijedi i polazna nejednakost.

3. Uzmimo točku G na stranici $\overline{AD}$ takvu da je $|AG| = |BE|$. Tada su trokuti ABG i BCE sukladni s okomitim odgovarajućim katetama. Odavde slijedi $BG \perp CE$ odnosno, $BG \cap CE = N$.



Opisana kružnica pravokutniku $CDGF$ prolazi kroz točku N, jer je $\sphericalangle GNC = 90^\circ$. Kako je $\overline{DF}$ također promjer te kružnice, slijedi da je $\sphericalangle DNF = 90^\circ$.

4. (a) Neka je $d = \text{nzd}((n+1)^m - n, (n+1)^{m+3} - n) = \text{nzd}(a, b)$. Tada d dijeli i razliku $a - b = (n+1)^m((n+1)^3 - 1)$. Kako broj $d \mid a = (n+1)^m - n$, mora biti relativno prost s $n+1$, pa zato dijeli $(n+1)^3 - 1$. Dakle,

$$(n+1)^3 \equiv 1 \pmod d \quad \text{i} \quad (n+1)^m \equiv n \pmod d.$$

Ako je $m = 3k + 1$, onda je

$$n \equiv (n+1)^m = (n+1)((n+1)^3)^k \equiv n + 1 \pmod d.$$

Odavde slijedi $d = 1$, pa su a i b relativno prosti.

Ako je $m = 3k + 2$, onda je

$$n \equiv (n+1)^m = (n+1)^2((n+1)^3)^k \equiv (n+1)^2 \pmod d,$$

odnosno, $n^2+n+1 \equiv 0 \pmod d$, ili na drugi način zapisano $n(n+1) \equiv -1 \pmod d$.
Zato je $n(n+1) \equiv (n+1)^2(n+1) = (n+1)^3 \equiv 1 \pmod d$.
Stoga je $-1 \equiv 1 \pmod d$, a odavde $d = 2$ ili $d = 1$.
Ako je $d = 2$, onda je to u suprotnosti sa $n(n+1) \equiv -1 \pmod 2$, jer je $n(n+1)$ uvijek paran broj. Slijedi, $d = 1$, pa su a i b relativno prosti.

(b) Zbog (a) je $m = 3k$ i $n \equiv (n+1)^m = ((n+1)^3)^k \equiv 1 \pmod d$.
Odavde je $1 \equiv (n+1)^3 \equiv (1+1)^3 = 8 \pmod d$, odakle slijedi $d = 7$ i $n \equiv 1 \pmod 7$.
Lako se sada provjeri da su nužni uvjeti $n \equiv 1 \pmod 7$ i $m \equiv 0 \pmod 3$ i dovoljni, tj. da za takve m i n vrijedi $7 \mid (n+1)^m - n$ i $7 \mid (n+1)^{m+3} - n$.

Rješenje je $(n, m) = (7l - 6, 3k)$, $l, k \in \mathbf{N}$.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 7. – 10. svibnja 1998. godine

III. razred

1. Dokažite da za svaki trokut sa stranicama a, b, c i nasuprotnim kutovima α, β, γ vrijedi jednakost

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma=3.$$

2. U stožac je upisana polusfera čija kružna baza leži u bazi stošca. Omjer oplošja stošca (uključujući i bazu) i oplošja polusfere (bez kružne baze) je $k=\frac{18}{5}$. Odredite vršni kut stošca.

3. U trokutu ABC su dane visine $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$, pri čemu je

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}.$$

Dokažite da je trokut ABC jednakostraničan.

4. Dokažite da među svakih 79 uzastopnih prirodnih brojeva postoji barem jedan čija je suma znamenaka djeljiva sa 13.

   Nađite niz od 78 uzastopnih prirodnih brojeva sa svojstvom da suma znamenaka niti jednog od njih nije djeljiva sa 13.

Rješenja za III. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

1. Koristeći sinusov poučak možemo lijevu stranu jednakosti zapisati u obliku

$$= \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\cos\beta+\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cos\gamma$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}(\sin\gamma\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma)+$$

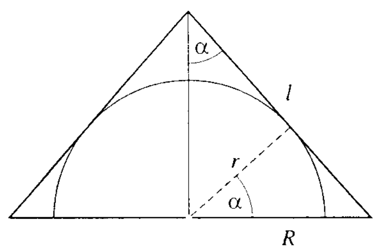
$$\frac{1}{\sin\beta}(\sin\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha)+$$

$$\frac{1}{\sin\gamma}(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)$$

$$= \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}+\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\beta}+\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}$$

$$= 1+1+1=3.$$

2.



Sa slike se vidi da je $\frac{R}{r}=\frac{1}{\cos\alpha}$, $\frac{l}{r}=\frac{l}{R}\cdot\frac{R}{r}=\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$. Omjer koji se traži je

$$\frac{R\pi l+R^2\pi}{2r^2\pi}=\frac{1}{2}\frac{R}{r}\left(\frac{l}{r}+\frac{R}{r}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Treba riješiti po α jednadžbu

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+1\right)=\frac{18}{5}.$$

Postupak rješavanja je:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\sin^2\alpha}\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)=\frac{18}{5}$$

$$36(1-\sin\alpha)\sin\alpha=5$$

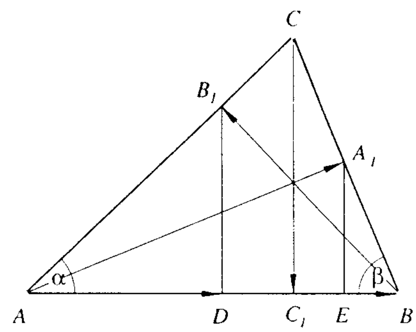
$$36\sin^2\alpha-36\sin\alpha+5=0$$

$$\sin\alpha=\frac{5}{6}\quad\text{ili}\quad\sin\alpha=\frac{1}{6}.$$

$$\alpha=\arcsin\frac{5}{6}=56^\circ 26'34''\quad\text{ili}\quad\alpha=\arcsin\frac{1}{6}=9^\circ 35'39''.$$

Traženi kut je $2\alpha = 2 \arcsin \frac{5}{6} = 112°53'8''$ ili $2\alpha = \arcsin \frac{1}{6} = 19°11'18''$.

3.



Označimo sa D i E ortogonalne projekcije točaka B_1 i A_1 na pravac AB. Tada iz jednakosti

$$\overrightarrow{C_1C} = -\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1}$$

za projekciju ovog vektora na pravac AB dobivamo

$$\vec{0} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}.$$

Stavljajući $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}$ dobivamo $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE} = \vec{0}$ tj. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EB}$ i $|AD| = |EB|$.
Iz pravokutnih trokuta ADB_1 i ABB_1 imamo

$$|AD| = |AB_1| \cos \alpha = |AB| \cos^2 \alpha.$$

Analogno za pravokutne trokute EBA_1 i ABA_1 je

$$|EB| = |BA_1| \cos \beta = |AB| \cos^2 \beta.$$

Kako je $|AD| = |EB|$, vrijedi $\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta$. Analogno se dobije $\cos^2 \alpha = \cos^2 \gamma$ tj. $\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta = \cos^2 \gamma$. Ako su svi kutovi trokuta šiljasti, onda je $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ i on je jednakostraničan.
Ako bi npr. γ bio tupi kut, onda su α i β šiljasti, pa iz $\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta$ slijedi $\alpha = \beta$. Tada iz jednakosti $\cos^2 \gamma = \cos^2 \alpha$ slijedi $\gamma = \pi - \alpha$. No, tada bi iz $\alpha + \alpha + (\pi - \alpha) = \pi$ slijedilo $\alpha = 0$ što nije moguće. Zato ovaj slučaj ne može nastupiti.

4. Među prvih 40 brojeva postoji barem jedan sa svojstvom da mu je znamenka jedinica jednaka 0 i predzadnja različita od 7, 8, 9. Neka je takav broj N. Tada sume znamenaka 13 brojeva

$$N,\ N+1,\ N+2,\ \ldots,\ N+9,\ N+19,\ N+29,\ N+39$$

daju različite ostatke pri dijeljenju sa 13 (svaka suma je za 1 veća od prethodne), pa je točno jedna od tih suma djeljiva sa 13, što je i trebalo dokazati.

Neka je $N = 10^k$, $k > 2$. Tada suma znamenaka niti jednog od brojeva N, $N-1$, ..., $N+38$ nije veća od 12, pa nije djeljiva sa 13. Promatrajmo brojeve $N-39$, $N-38$, ..., $N-1$. Oni imaju oblik $\underbrace{99\ldots9}61$, $\underbrace{99\ldots9}62$, ..., $\underbrace{99\ldots9}99$, gdje svaki označeni

dio ima po $k-2$ znamenke 9. Sume znamenaka brojeva 61, 62, ..., 99 pri dijeljenju sa 13 daju sve moguće ostatke osim 6 (jer je $6+1>6$, a $9+9>13+6$).
Dakle, ako odaberemo k tako da $13 \mid 9(k-2)+6$, onda suma znamenaka niti jednog od brojeva $N-39$, $N-38$, ..., $N-1$ neće biti djeljiva sa 13: npr. da bi $13 \mid 9k-12 = 3(3k-4)$, možemo uzeti $k=10$. Dakle jedna od mogućnosti traženih brojeva je

$$10^{10}-39, 10^{10}-38, \ldots 10^{10}, \ldots, 10^{10}+37, 10^{10}+38.$$

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Kraljevica, 7. – 10. svibnja 1998. godine

IV. razred

1. Dokažite da sve tetive parabole $y^2 = 4ax$, koje su hipotenuze pravokutnog trokuta s pravim kutom u ishodištu, prolaze istom točkom.

2. Neka su a i m prirodni brojevi, p neparan prost broj, takav da $p^m | a - 1$ i $p^{m+1} \nmid a - 1$. Dokažite da

   a) $p^{m+n} | a^{p^n} - 1$ za svaki $n \in \mathbf{N}$,

   b) $p^{m+n+1} \nmid a^{p^n} - 1$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

3. Neka je $A = \{1, 2, 3, ..., 2n\}$ i funkcija $g : A \to A$ definirana sa $g(k) = 2n - k + 1$. Da li postoji funkcija $f : A \to A$ takva da je $f(k) \neq g(k)$ za svaki $k \in A$ i $f(f(f(k))) = g(k)$ za svaki $k \in A$, ako je

   a) n=999,

   b) n=1000?

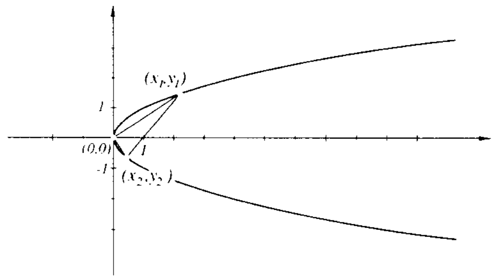
4. Osam žarulja poredano je u krug. Svaka žarulja može biti ili upaljena ili ugašena. U jednom koraku radimo sljedeću transformaciju: žarulja će nakon transformacije biti ugašena, ukoliko je jedna od njoj susjednih žarulja upaljena a druga ugašena, odnosno, žarulja će nakon transformacije svijetliti, ukoliko su obje njoj susjedne žarulje ili upaljene ili ugašene. U jednom se koraku na stanja svih žarulja djeluje istovremeno.

   Dokažite da će, nakon najviše četiri koraka, sve žarulje svijetliti.

Rješenja za IV. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.*

Ako sve tetive prolaze kroz istu točku, očekujemo da je ta točka na osi parabole, tj. na x-osi.



Krajnje točke tetive (x_1, y_1), (x_2, y_2) i točka $(0,0)$ su vrhovi pravokutnog trokuta. Tražena točka je $(x_0, 0)$. Tada iz

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

dobivamo

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

Budući da su krajnje točke na paraboli,

$$y_1^2 = 4ax_1, \quad y_2^2 = 4ax_2 \quad \Rightarrow \quad (y_1y_2)^2 = 16a^2x_1x_2 = -16a^2y_1y_2.$$

Iz ove jednakosti je

$$\begin{aligned} 4a(x_2y_1 - x_1y_2) &= y_1y_2(y_2 - y_1) \\ &= -16a^2(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Iz $\dfrac{y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2}$, je

$$x_0 = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1 - y_2} = \frac{4a(y_1 - y_2)}{y_1 - y_2} = 4a.$$

Dakle, svaka od promatranih tetiva prolazi kroz točku $(4a, 0)$.

Drugo rješenje.

Neka su (x_1, y_1) i (x_2, y_2) krajnje točke tetiva kao u gornjem slučaju. Budući da su koeficijenti smjerova pravaca koji prolaze kroz ishodište recipročni, vrijedi

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \qquad (*)$$

Ako je jednadžba pravca na kojem leži tetiva $y = mx + b$, onda su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $(mx + b)^2 = 4ax$, tj. $m^2x^2 + (2bm - 4a)x + b^2 = 0$. Tada je

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{b^2}{m^2}, \\ y_1 y_2 &= (mx_1 + b)(mx_2 + b) \\ &= m^2 x_1 x_2 + mb(x_1 + x_2) + b^2 = \frac{4ab}{m}. \end{aligned}$$

Iz (*) je $\frac{b^2}{m^2} + \frac{4ab}{m} = 0$, ili $b = -4am$. Dakle, svaka tetiva koja je hipotenuza pravokutnog trokuta s vrhom u ishodištu, leži na pravcu čija jednadžba je $y = mx - 4am = m(x - 4a)$, a to je pravac koji prolazi kroz točku $(4a, 0)$.

2. Neka oznaka $q^n || z$ označava da $q^n | z$ i $q^{n+1} \nmid z$ Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n.
Neka $p^m || a - 1$.
Tvrdnja vrijedi za $n = 0$, prema uvjetu zadatka.
Pretpostavimo da $p^{m+n} || a^{p^n} - 1$, za neki $n \geq 0$ i dokažimo da $p^{m+n+1} || a^{p^{n+1}} - 1$.
Po pretpostavci indukcije je $a^{p^n} = bp^{m+n} + 1$, pri čemu su b i p relativno prosti.
Korištenjem pretpostavke indukcije dobivamo

$$a^{p^{n+1}} - 1 = \left(a^{p^n}\right)^p - 1 = (bp^{n+m} + 1)^p - 1$$

$$= (bp^{n+m})^p + \ldots + \binom{p}{2}(bp^{n+m})^2 + bp^{n+m+1},$$

odakle zaključujemo $p^{m+n+1} || a^{p^{n+1}} - 1$.

3. Označimo $f^2(k) = f(f(k)), f^3(k) = f(f(f(k))), \ldots$ Imamo

$$f^6(k) = f^3(f^3(k)) = g(g(k)) = k.$$

Pokažimo da je za svaki $k \in A$

$$f^r(k) \neq k, \quad r = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{2}$$

Pretpostavimo li $f^2(k) = k$, dobivamo $f^3(k) = f(k)$ što je u suprotnosti s pretpostavkom da je $g(k) \neq f(k)$ za svaki $k \in A$.
Pretpostavimo da je za neki $k \in A$, $f(k) = k$. Tada je $f^2(k) = f(k) = k$, a ovo nije moguće, prema upravo dokazanom.
Ako bi bilo $f^3(k) = k$, onda bi bilo $g(k) = k$ ili $2n - k + 1 = k$, što nije moguće.
Neka je $r = 4$ ili 5. Pretpostavimo li $f^r(k) = k$, imamo $f^{6-r}(k) = f^{6-r}(f^r(k)) = f^6(k) = k$ što je, zbog $6 - r = 1$ ili $6 - r = 2$, opet kontradikcija.
Dakle, niz

$$k, f(k), f^2(k), f^3(k), f^4(k), f^5(k)$$

se, za svaki $k \in A$, sastoji od šest različitih brojeva, da bi nakon toga opet bilo $f^6(k) = k, f^7(k) = f(k)$, itd.

Dakle, da bi postojala funkcija f koja zadovoljava uvjete zadatka, mora biti $2n$ djeljivo sa 6. Zato ne postoji funkcija f koja zadovoljava uvjete zadatka za $n = 1000$. Također se može konstruirati funkcija f koja zadovoljava uvjete zadatka ako je n djeljivo sa 6. Npr. za $n = 999$ napravimo particiju skupa $\{1, 2, 3, \dots, 1998\}$ na šesteročlane podskupove oblika $\{i, j, k, 1999 - k, 1999 - j, 1999 - i\}$, $i \neq j \neq k \neq i$, i na svakom takvom podskupu definirajmo funkciju f sa

$$f(i) = j, f(j) = k, f(k) = 1999 - i,$$

$$f(1999 - i) = 1999 - j, f(1999 - j) = 1999 - k, f(1999 - k) = i.$$

Tako definirana funkcija f zadovoljava uvjete zadatka.

4. Označimo sa $+_2$ operaciju zbrajanja modulo 2. Neka

$$(a_1(n), a_2(n), a_3(n), a_4(n), a_5(n), a_6(n), a_7(n), a_8(n)), \quad a_i \in \{0, 1\}$$

označava stanje žarulja nakon n koraka (za $n = 0$ početno stanje). Pri tome $a_i(n) = 0$ znači da i-ta žarulja u n-tom koraku svijetli, dok $a_i(n) = 1$ znači da je i-ta žarulja u n-tom koraku ugašena. Pravilo promjene stanja prilikom jedne transformacije možemo opisati ovako

$$a_i(n + 1) = a_{i-1}(n) +_2 a_{i+1}(n). \tag{3}$$

Uočimo proizvoljnu i-tu žarulju i pokažimo da mora biti $a_i(4) = 0$. Imamo redom

$$a_i(n + 2) = a_{i-1}(n + 1) +_2 a_{i+1}(n + 1) = a_{i-2}(n) +_2 a_{i+2}(n),$$

$$a_i(n + 3) = a_{i-2}(n + 1) +_2 a_{i+2}(n + 1)$$

$$= a_{i-3}(n) +_2 a_{i-1}(n) +_2 a_{i+1}(n) +_2 a_{i+3}(n). \tag{4}$$

Sada iz (4) dobivamo

$$a_i(4) = a_{i-3}(1) +_2 a_{i-1}(1) +_2 a_{i+1}(1) +_2 a_{i+3}(1)$$

(a odavde i iz (3))

$$= a_{i-4}(0) +_2 a_{i-2}(0) +_2 a_{i-2}(0) +_2 a_i(0) +_2 a_i(0) +_2 a_{i+2}(0) +_2 a_{i+2}(0) +_2 a_{i+4}(0)$$

$$= 2(a_{i-4}(0) +_2 a_{i-2}(0) +_2 a_i(0) +_2 a_{i+2}(0)) = 0$$

čime smo dokazali tvrdnju.

Primjedba. Mogli smo uzeti i da

$$(a_1(n), a_2(n), a_3(n), a_4(n), a_5(n), a_6(n), a_7(n), a_8(n)), \quad a_i \in \{-1, 1\}$$

označava stanje žarulja nakon n koraka, pri čemu $a_i(n) = 1$ znači da i-ta žarulja u n-tom koraku svijetli, dok $a_i(n) = -1$ znači da je i-ta žarulja u n-tom koraku ugašena. Pravilo promjene stanja prilikom jedne transformacije tada možemo opisati ovako

$$a_i(n + 1) = a_{i-1}(n) \cdot a_{i+1}(n),$$

a onda analogno kao prije možemo pokazati $a_i(4) = 1$ za svaki $i = 1, 2, 3, \dots, 8$.