MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

6. ožujka 1998.

I. razred

1. U trokutu ABC je $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Dokažite da je duljina t_a, težišnice iz vrha A, jednaka

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

2. Odredite broj $\overline{abcd}$ s ovim svojstvom:

$$\begin{aligned} \overline{cda} - \overline{abc} &= 297 \\ a + b + c &= 23. \end{aligned}$$

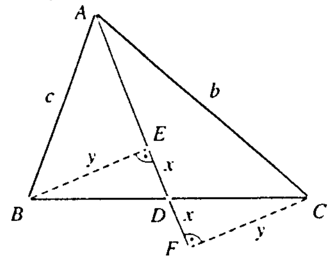
($\overline{abcd}$ je zapis broja u dekadskom sustavu.)

3. Ako je $x + y + z = 6$, $x, y, z \geq 0$, dokažite da je onda $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.

4. U konveksnom mnogokutu s 1 998 stranica, njihove duljine su prirodni brojevi. Opseg mnogokuta je 1 997 000. Dokažite da barem dvije stranice tog mnogokuta imaju jednake duljine.

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$, točke E i F nožišta visina iz točaka B i C na težišnicu t_a. Trokuti BED i CFD su sukladni. Označimo $|DE| = |DF| = x$ i $|CF| = |BE| = y$.



Iz pravokutnih trokuta ABE i AFC je

$(t_a - x)^2 + y^2 = c^2,$ 5 bodova

$(t_a + x)^2 + y^2 = b^2.$ 5 bodova

Zbrajanjem se dobiva $2t_a^2 + 2x^2 + 2y^2 = b^2 + c^2$. 5 bodova

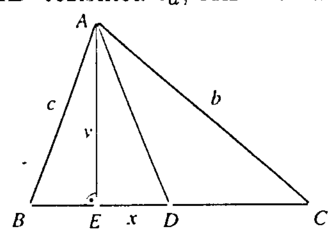
Iz pravokutnog trokuta DFC je $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, 5 bodova

pa je

$$2t_a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{4} = b^2 + c^2.$$

odakle slijedi tražena jednakost. 5 bodova

Drugo rješenje. Neka je $\overline{AD}$ težišnica t_a, $\overline{AE}$ visina v_a, $|ED| = x$.



$$\begin{aligned}
\triangle AED &\Rightarrow t_a = v^2 + x^2 \\
\triangle AEB &\Rightarrow v^2 = c^2 - \left(\tfrac{a}{2} - x\right)^2 \\
\triangle AEC &\Rightarrow v^2 = b^2 - \left(\tfrac{a}{2} + x\right)^2 .
\end{aligned}$$

Iz dviju zadnjih jednakosti dobivamo

$$x = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

U vrštavanjem u prvu jednakost slijedi

$$t^2 = c^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2),$$

a to je jednakost koju je trebalo dokazati.

2.

$$\begin{aligned} \overline{cda} - \overline{abc} &= 297 \\ 100c + 10d + a - 100a - 10b - c &= 297 \\ 99(c - a - 3) &= 10(b - d) \end{aligned}$$

5 bodova

Iz $11 \mid b - d$ slijedi da je $b = d$. Zato je $c - a - 3 = 0$. 5 bodova

Odavde i iz dane jednakosti $a + b + c = 23$ je

$c = a + 3$,

$b = 23 - a - a - 3 = 2(10 - a)$. 5 bodova

b je parna znamenka, pa je dovoljno da provjerimo sve mogućnosti, $b \in \{2, 4, 6, 8, 0\}$.

Za $b = 2$ je $a = 9$, $c = 12$, što nije moguće;

Za $b = 4$ je $a = 8$, $c = 11$, što nije moguće;

Za $b = 6$ je $a = 7$, $c = 10$, što nije moguće;

Za $b = 8$ je $a = 6$, $c = 9$, što je rješenje;

Za $b = 0$ je $a = 10$, $c = 13$, što nije moguće. 10 bodova

Dakle, rješenje je $\overline{abcd} = 6898$.

3. Za svake realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$. 5 bodova

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo

$2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$. 5 bodova

Dodamo li lijevoj i desnoj strani nejednakosti $x^2 + y^2 + z^2$, imamo

$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = 36$,

odakle slijedi tvrdnja $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$. 15 bodova

Tražena nejednakost je posljedica nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine: $K \geq A$, što u našem slučaju znači

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3}$$

za svake realne brojeve x, y i z, pa onda i za nenegativne.

4. Dani mnogokut sa stranicama cjelobrojnih različitih duljina ima najmanji opseg ako su mu duljine stranica 1, 2, 3, ..., 1998. 5 bodova

Taj najmanji opseg je jednak

$1 + 2 + 3 + \ldots + 1998 = \frac{1998 \cdot 1999}{2} = 1\,997\,001$. 5 bodova

Kako je opseg promatranog mnogokuta jednak 1 997 000, onda (po Dirichletovom principu) barem dvije stranice moraju imati jednake duljine. 15 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

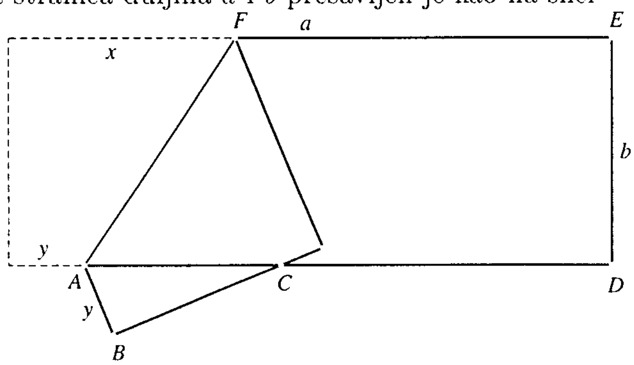
MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

6. ožujka 1998.

II. razred

1. List papira stranica duljina a i b presavijen je kao na slici



Izračunajte površinu trokuta ABC, ako je $a = 8$, $b = 3$, $x = 3$ i $y = 1$.

2. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi za koje je
   (i) $z_1 z_2 z_3 = 1$,
   (ii) $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$.
   Dokažite da je barem jedan od njih jednak 1.

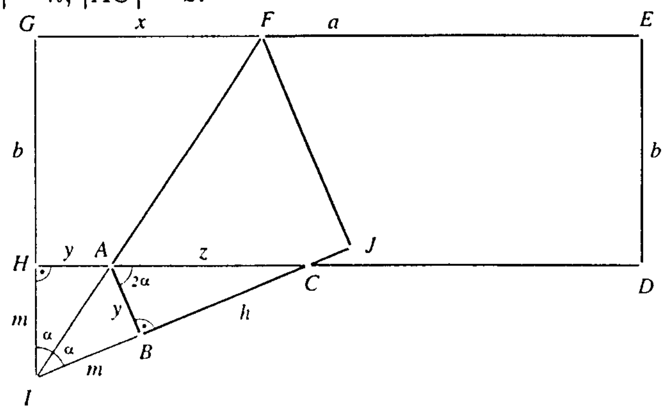
3. Riješite jednadžbu

$$x = 1 - 1998(1 - 1998x^2)^2, \quad x \in \mathbf{C}.$$

4. Zadana je funkcija $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + (a+1)x + 1$, $\quad a \in \mathbf{R}$.
   a) Odredite a tako da bude $\left|\frac{f(x)}{x^2+x+1}\right| < 3$, za svaki $x \in \mathbf{R}$.
   b) Odredite uvjete uz koje je graf funkcije $y = |f(x)|$ parabola.
   c) Nađite geometrijsko mjesto tjemena svih parabola $y = |f(x)|$. Nacrtajte sliku!

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Označimo točke G, H, I, J kao na slici. Neka je $\sphericalangle AIH = \sphericalangle AIB = \alpha$, $|HI| = m$, $|BC| = n$, $|AC| = z$.



Iz sličnosti $\triangle AIH$ i $\triangle IFG$ je

$$\frac{x}{y} = \frac{b+m}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{by}{x-y}.$$

8 bodova

Iz sličnosti $\triangle ABC$ i $\triangle IHC$ ($\sphericalangle HIB = \sphericalangle CAB = 2\alpha$) je

$$\frac{y}{z} = \frac{m}{m+n} \quad \Rightarrow \quad y\left(1+\frac{n}{m}\right) = z = \sqrt{y^2+n^2}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{2my^2}{m^2-y^2}.$$

8 bodova

Sada je

$$n = 2y^2 \cdot \frac{\frac{by}{x-y}}{\left(\frac{by}{x-y}\right)^2 - y^2} = \frac{2by(x-y)}{b^2-(x-y)^2}.$$

Tražena površina je

$$\begin{aligned} P &= P(ABC) \\ &= \frac{ny}{2} \\ &= \frac{by^2(x-y)}{b^2-(x-y)^2}. \end{aligned}$$

6 bodova

U specijalnom slučaju je $P = \frac{6}{5}$. 3 boda

2. *Prvo rješenje.* Iz (1) i (3) dobiva se

$$z_2 + z_3 + \frac{1}{z_2 z_3} = \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + z_2 z_3,$$

5 bodova

odnosno, $(1 - z_2)(1 - z_3) = (1 - \frac{1}{z_2})(1 - \frac{1}{z_3})$. 5 bodova

Množenjem sa $z_2 z_3$, ovaj uvjet prelazi u

$z_2 z_3(1 - z_2)(1 - z_3) = (1 - z_2)(1 - z_3)$, 5 bodova

tj. $(z_2 z_3 - 1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$. 5 bodova

Odavde je $z_2 = 1$, $z_3 = 1$ ili $z_2 z_3 = 1$. U trećem slučaju je $z_1 = 1$. 5 bodova

Drugo rješenje. (Pomoću Vièteovih formula.)

Neka je $a = z_1 + z_2 + z_3$, $b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$, $c = z_1 z_2 z_3$.

Tada su z_1, z_2, z_3 korijeni kubne jednadžbe $z^3 - az^2 + bz - c = 0$. 10 bodova

Uvjeti (i) i (ii) glase $c = 1$ i $a = b$.

Tada se kubna jednadžba reducira na $z^3 - az^2 + az - 1 = 0$. 10 bodova

Očito je jedno njezino rješenje $z = 1$. 5 bodova

3. Neka je $1 - 1998x^2 = t$. 5 bodova

Tada se jednadžba svodi na sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x &= 1 - 1998t^2 \\ 1 - 1998x^2 &= t \end{aligned} \qquad \text{odnosno} \qquad \begin{aligned} 1 - x &= 1998t^2 \\ 1 - t &= 1998x^2 \end{aligned}$$

5 bodova

Oduzimanjem ovih jednakosti imamo $t - x = 1998(t - x)(t + x)$, tj.

$(t - x)(1 - 1998(t + x)) = 0$. 5 bodova

Imamo dva slučaja:

1° $t = x$, pa je $1 - 1998x^2 = x$ i $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7993}}{3996}$; 5 bodova

2° $1998(t + x) = 1$, pa je $t = \frac{1}{1998} - x$,

odnosno $1 - 1998x^2 = \frac{1}{1998} - x$. Rješenja jednadžbe

$1998^2 x^2 - 1998x - 1997 = 0$ su

$$x_{3,4} = \frac{1998 \pm 1998\sqrt{7989}}{2 \cdot 1998^2} = \frac{1 \pm \sqrt{7989}}{3996}.$$

5 bodova

4. a) Rješavamo nejednadžbu

$$-3 < \frac{x^2 + (a+1)x + 1}{x^2 + x + 1} < 3.$$

Množenjem sa $x^2 + x + 1$ (> 0 za svaki $x \in \mathbf{R}$), dobiva se

$$-3x^2 - 3x - 3 < x^2 + (a+1)x + 1 < 3x^2 + 3x + 3.$$

Promatramo posebno lijevu i desnu nejednakost:

$1^\circ \quad 4x^2 + (4+a)x + 4 > 0$ $\qquad$ $2^\circ \quad 2x^2 + (2-a)x + 2 > 0$

pa mora biti

$D = a^2 + 8a - 48 < 0$ $\qquad$ $D = a^2 - 4a - 12 < 0$

$(a+12)(a-4) < 0$ $\qquad$ $(a-6)(a+2) < 0$

$a \in (-12, 4)$ $\qquad$ $a \in (-2, 6)$

Dakle, rješenje je $a \in (-2, 4)$. 10 bodova

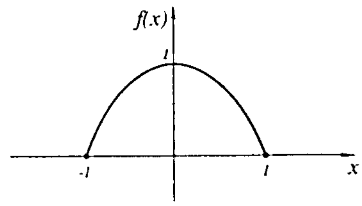
b) Da bi graf funkcije $y = |f(x)|$ bio parabola mora biti $D < 0$, odnosno $(a+1)^2 - 4 \leq< 0$, tj. $|a+1| \leq 2$, $-3 \leq a \leq 1$. (*) 5 bodova

c) Koordinate tjemena su $T\left(-\frac{a+1}{2}, \left|\frac{a^2+2a-3}{4}\right|\right)$.

Iz $x = -\frac{a+1}{2}$, je $a = -2x - 1$, pa je

$y = \left|\frac{a^2+2a-3}{4}\right| = |x^2 - 1|$. 5 bodova

Zbog uvjeta (*) mora biti $-3 \leq -2x - 1 \leq 1$, tj. $x \in [-1, 1]$.
Zato je i $y = |x^2 - 1| = 1 - x^2$.
Dakle, geometrijsko mjesto tjemena svih parabola $y = |f(x)|$ je dio parabole $y = 1 - x^2$ na zatvorenom intervalu $x \in [-1, 1]$.



5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

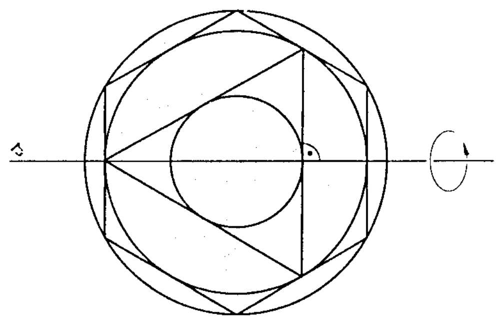
6. ožujka 1998.

III. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\log_{x+8}(5-\sqrt{1+2x+x^2})=\frac{1}{2}.$$

2. Nađite volumen rotacionog tijela nastalog rotacijom osjenčanog lika (vidi sliku!) oko osi s, ako je polumjer najvećeg kruga jednak a.



3. Duljine osnovica trapeza su a i b $(a>b)$, a visina h. Njegove dijagonale su međusobno okomite, a kut između krakova je α. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{h}=\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\operatorname{ctg}\alpha.$$

4. Riješite jednadžbu

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a},\qquad (a,b\in\mathbf{R}^+).$$

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Da bi logaritamska funkcija bila definirana, mora biti:
$x+8>0$ i $x+8 \neq 1$, tj. $x>-8$ i $x \neq -7$;
$5-\sqrt{1+2x+x^2}=5-|x+1|>0 \quad \Rightarrow \quad x \in <-6,4>$. 9 bodova

(1) Za $x \in <-6,-1>$ je
$\log_{x+8}(5+x+1)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 6+x=\sqrt{x+8}$
$\Rightarrow \quad x^2+11x+28=0 \quad \Rightarrow \quad x=-4$ (drugo rješenje $x=-7$ ne zadovoljava gornji uvjet). 8 bodova

(2) Za $x \in [-1,4>$ je
$\log_{x+8}(5-x-1)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4-x=\sqrt{x+8}$
$\Rightarrow \quad x^2-9x+8=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$ (drugo rješenje $x=8$ ne zadovoljava gornji uvjet). 8 bodova

2. Neka je V_1 volumen kugle polumjera $r_1=a$; V_2 - volumen krnjeg stošca polumjera donje baze $R_2=a$, polumjera gornje baze $r_2=\frac{a}{2}$, visine $v_2=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; V_3 - volumen kugle polumjera $r_3=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; V_4 - volumen stošca polumjera baze $r_4=\frac{3a}{4}$, visine $v_4=\frac{3\sqrt{3}a}{4}$; V_5 - volumen kugle polumjera $r_5=\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

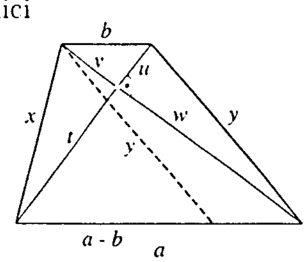
10 bodova

Tada je volumen danog tijela

$$\begin{aligned} V &= V_1-2V_2+V_3-V_4+V_5 \\ &= \frac{4a^3\pi}{3}-\frac{7\sqrt{3}a^3\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{2}-\frac{9\sqrt{3}a^3\pi}{64}+\frac{\sqrt{3}a^3\pi}{16} \\ &= \left(\frac{4}{3}-\frac{31\sqrt{3}}{192}\right)a^3\pi. \end{aligned}$$

15 bodova

3. Prema oznakama na slici



Slika 2 boda

je

$$(a-b)^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha=\frac{x^2+y^2-(a-b)^2}{2xy}.$$

5 bodova

P je površina trokuta sa stranicama x, y i $a-b$,

$$P=\frac{(a-b)h}{2}=\frac{xy}{2}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha=\frac{(a-b)h}{xy}.$$

5 bodova

Sada je

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x^2 + y^2 - (a-b)^2}{2(a-b)h}$$

$$= \frac{v^2 + t^2 + u^2 + w^2 - (a-b)^2}{2(a-b)h} = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{2(a-b)h},$$

10 bodova

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{ab}{(a-b)h},$$

odakle se množenjem sa $\frac{a-b}{ab} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ dobiva traženi identitet. 3 boda

4. Uz uvjete $b\cos x + a \neq 0$ i $b\sin x + a \neq 0$, nakon sređivanja dobiva se

$$(\sin x - \cos x)(a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x)) = 0.$$

10 bodova

Ako je $\sin x - \cos x = 0$, onda je $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$. 7 bodova

Kako je

$$a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) > a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0,$$

jedina rješenja su gore navedena. 8 bodova

Zadnji dio rješenja može se izvesti promatranjem jednadžbe

$$a^2 + b^2 + ab(\sin x + \cos x) = 0, \text{ tj. } \sin x + \cos x = -\frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Na ovo možemo primijeniti adicione formule,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\sqrt{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2ab} \leq -\sqrt{2} \cdot \frac{2ab}{2ab} = -\sqrt{2},$$

što ne može biti ispunjeno jer je $\sin x \in [-1, 1]$.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

6. ožujka 1998.

IV. razred

1. Polovištem tetive parabole $y^2 = \frac{8}{3}x$, koja leži na pravcu $4x - 3y - 12 = 0$, povučena je paralela s x-osi. Sjecištem te paralele i parabole povučena ja na nju tangenta. Pokažite da je ona paralelna sa zadanom tetivom.

2. Dokažite da je za svaki cijeli broj $n \geq 0$, broj

$$7^{2n+1} + 2 \cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1},$$

djeljiv s 50.

3. Koliko ima strogo rastućih aritmetičkih nizova čiji su svi članovi pozitivni cijeli brojevi, a zbroj prvih 37 jednak je 1998?

4. U trostranoj piramidi duljina točno jednog brida je veća od 1. Pokažite da njezin volumen nije veći od $\frac{1}{8}$.

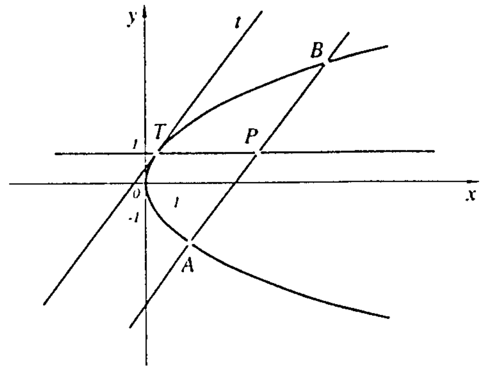
Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Nađimo najprije sjecišta parabole i pravca, tj. krajnje točke tetive:

$$y^2 = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{4}y + 3\right) \quad \text{tj.} \quad y^2 - 2y - 8 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = -2, \; y_2 = 4; \; x_1 = \tfrac{3}{2}, \; x_2 = 6; \quad \text{tj.} \quad A(\tfrac{3}{2}, -2), \, B(6,4).$$

5 bodova



Polovište tetive je $P(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}) = P(\frac{15}{4}, 1)$. 5 bodova
Paralela s osi x kroz tu točku siječe parabolu u točki $T(\frac{3}{8}, 1)$.
Treba naći jednadžbu tangente u toj točki.
Jednadžba tangente parabole $y^2 = 2px$ u točki (x_0, y_0) je

$$y_0 y = p(x_0 + x),$$

a za $p = \frac{4}{3}$, $x_0 = \frac{3}{8}$, $y_0 = 1 \;\; \Rightarrow \;\; 8x - 6y + 3 = 0$, što je paralelno sa zadanim pravcem. 15 bodova

2. Za $n = 0$ je $7 + 2 \cdot 13 + 17 = 50$ djeljivo s 50. 3 boda
Neka je $7^{2n+1} + 2 \cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1}$. djeljivo s 50 za neki cijeli broj $n \geq 0$. 5 bodova
Tada je

$$\begin{aligned}
&7^{2n+3} + 2 \cdot 13^{2n+3} + 17^{2n+3} \\
&= 7^{2n+1} \cdot (50 - 1) + 2 \cdot 13^{2n+1} \cdot (170 - 1) + 17^{2n+1} \cdot (290 - 1) \\
&= 7^{2n+1} \cdot 50 + 13^{2n+1} \cdot 50 + 290 \cdot (13^{2n+1} + 17^{2n+1}) \\
&\quad -(7^{2n+1} + 2 \cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1}).
\end{aligned}$$

7 bodova

Prvi i drugi član su djeljivi s 50, četvrti je djeljiv s 50 po pretpostavci indukcije, a treći se može prikazati u obliku

$$290 \cdot (13 + 17) \cdot (13^{2n} + \ldots + 17^{2n}) = 50 \cdot 29 \cdot 6 \cdot (13^{2n} + \ldots + 17^{2n})$$

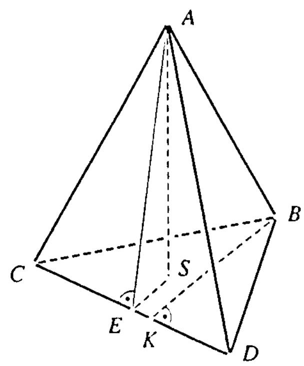
što je također djeljivo s 50. 7 bodova
Prema principu matematičke indukcije, $7^{2n+1} + 2 \cdot 13^{2n+1} + 17^{2n+1}$ je djeljivo s 50 za svaki $n \geq 0$. 3 boda

3. Članove niza označimo s a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, a njegovu razliku sa d.
Prema uvjetima zadatka je a_n, pozitivan cijeli broj za svaki $n = 1, 2, 3, \ldots$. 3 boda
Ako je $a_{19} = x$, tada je

$$(x - 18d) + (x - 17d) + \ldots + (x - d) + x + (x + d) + \ldots + (x + 18d) = 1998,$$

a odatle je $x = a_{19} = 54$. 10 bodova
Sada je $a_1 = x - 18d = 54 - 18d = 18 \cdot (3 - d)$, i jer je a_1 pozitivan cijeli broj, a niz mora biti rastući, dobivamo $d \in \{1, 2\}$. 6 bodova
Postoje dva niza:
(1) $d = 1$, $a_1 = 36$, i traženi niz je $a_n = n + 35$; 3 boda
(2) $d = 2$, $a_1 = 18$, i traženi niz je $a_n = 2n + 16$. 3 boda

4. Neka je $\overline{AB}$ najdulji brid piramide. i neka je $|CD| = a < 1$.
Tada nijedna stranica trokuta ACD i BCD nije dulja od 1, radi čega duljine visina $\overline{AE}$ i $\overline{BK}$ nisu veće od $\sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$. Isto vrijedi i za visinu piramide, tj. $|AS| \leq |AE| \leq \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$.
5 bodova



Dakle, volumen tetraedra je

$$V = \frac{1}{3} P(\triangle BCD) \cdot |AS| \leq \frac{1}{24} a(4 - a^2).$$

5 bodova

Pošto funkcija $y = f(a) = a(4 - a^2)$, $\quad 0 \leq a \leq 1$, zbog

$$f(a_2) - f(a_1) = (a_2 - a_1)[4 - (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)] \geq 0, \;\; 0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1,$$

10 bodova

monotono raste na $[0, 1]$, tj. dostiže najveću vrijednost $y = 3$, za $a = 1$, odakle slijedi da je $V \leq \frac{1}{8}$. 5 bodova