MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

3. travnja 1998.

I. razred

1. Za koje parametre $p \in \mathbf{R}$ jednadžba

$$\frac{5x}{5x^2+px+45}+\frac{x+10}{x^2+5x}=\frac{2}{x}$$

nema nijedno rješenje?

2. Ako je

$$\begin{aligned} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2, \\ x^{-1}+y^{-1}+z^{-1} &= c^{-1}, \end{aligned}$$

odredite $x^3+y^3+z^3$.

3. Visina $\overline{CD}$ na hipotenuzu $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC je promjer kružnice k koja siječe katete $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ tog trokuta redom u točkama E i F. Ako je G sjecište pravaca CD i EF i ako vrijedi

$$|CG|^2 = |CE| \cdot |CF|,$$

koliki su šiljasti kutovi trokuta ABC?

4. Da li je moguće rasporediti znamenke 0, 1, ..., 9 u krug tako da suma svaka tri uzastopna broja bude najviše:

   a) 13,
   b) 14,
   c) 15?

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Množenjem jednadžbe s $x(x+5)(5x^2+px+45)$ dobije se jednadžba

$$5x(x^2+5x)+(x+10)(5x^2+px+45)=2(x+5)(5x^2+px+45)$$

5 bodova

koja je ekvivalentna s polaznom uz uvjete $x \neq 0$, $x+5 \neq 0$, $5x^2+px+45 \neq 0$.
Nakon sređivanja se dobije $(25-p)x^2-45x=0$. 5 bodova
Odmah se vidi da za $p=25$ jednadžba nema rješenja.
Jedino moguće rješenje je $x=\frac{45}{25-p}$. 5 bodova
Lako se utvrdi da je $x+5=0$ ako i samo ako je $p=34$, te da je $5x^2+px+45=0$ također samo za $p=34$.
Dana jednadžba nema rješenja za $p=25$ i $p=34$. 10 bodova

2. Iz treće od danih jednakosti dobije se

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{c}$$

5 bodova

a iz prve dvije

$$a^2-b^2=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+zx).$$

5 bodova

Stoga je

$$xyz=c\cdot\frac{a^2-b^2}{2}.$$

5 bodova

Konačno iz

$$(x+y+z)^3=3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-2(x^3+y^3+z^3)+6xyz$$

dobijemo

$$x^3+y^3+z^3=\frac{3ab^2+3c(a^2-b^2)-a^3}{2}.$$

10 bodova

3. Možemo pretpostaviti da je $\alpha \leq \beta$. Kako je $\angle CED = \angle CFD = 90^\circ$ (Talesov teorem), četverokut $CEDF$ je pravokutnik, pa je

$$|CG|=|GE|=|GF|. \qquad (1)$$

5 bodova

Neka je $\overline{CH}$ visina na hipotenuzu $\overline{EF}$ pravokutnog trokuta EFC. Vrijedi

$$2P_{\triangle EFC} = |CE| \cdot |CF| = |EF| \cdot |CH|$$

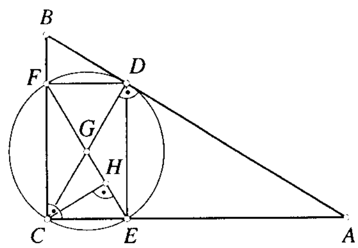
pa je zbog uvjeta zadatka

$$|CG|^2 = |EF| \cdot |CH| = 2|GE| \cdot |CH|$$

a zbog (1)

$$|CG|^2 = 2|CG| \cdot |CH|$$

odnosno $|CG| = 2|CH|$. 10 bodova



Zbog zadnje relacije $\angle HCG = 60^\circ$ i $\angle HGC = 30^\circ$, pa slijedi

$$\angle ACD = \angle GCE = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

$$\alpha = \angle CAD = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ,$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

10 bodova

4.

a) Ako je suma svaka tri uzastopna najviše 13, onda je suma svih uzastopnih trojki tj. trostruka suma svih brojeva najviše 130. Međutim suma svih brojeva je 45, a $3 \cdot 45 = 135 > 130$. Kontradikcija. Ovo nije moguće. 10 bodova

b) Trostruka suma je 135, i to mora biti jednako sumi deset suma uzastopnih trojki. Kako svaka od njih može biti najviše 14, a dvije susjedne ne mogu biti jednake (to bi značilo da su dva broja udaljena za tri mjesta jednaka), jedino je moguće da sume po tri uzastopna broja budu naizmjence 13 i 14 ($5 \cdot 13 + 5 \cdot 14 = 135$). No, tada zaključujemo da su dva broja udaljena za 6 mjesta jednaka. Kontradikcija. 10 bodova

c) Moguće je. Npr: 3, 8, 1, 5, 9, 0, 6, 7, 2, 4. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

3. travnja 1998.

II. razred

1. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2(x^2+y^2)-3xy+2(x+y)-39 &= 0, \\ 3(x^2+y^2)-4xy+(x+y)-50 &= 0. \end{aligned}$$

2. Nađite sve realne brojeve a i b tako da za svaki $x \in [-1,1]$ vrijedi nejednakost

$$|2x^2+ax+b| \leq 1.$$

3. Pomoću ravnala i šestara konstruirajte pravokutni trokut kojemu je zadana duljina visine na hipotenuzu i polumjer upisane mu kružnice.

4. Odredite najveći prirodan broj n za koji postoji n-znamenkasti broj $\overline{z_1 z_2 \ldots z_n}$ (u dekadskom sustavu) s ovim svojstvima:

   (a) $z_1, z_2, \ldots, z_n$ su medjusobno različiti brojevi;

   (b) za svaki $j \leq n$, $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot j) | \overline{z_1 z_2 \ldots z_j}$.

   Za taj n nađite sve n-znamenkaste brojeve s traženim svojstvima.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Uvedimo supstituciju: $x + y = a$, $xy = b$ 5 bodova
Tada je $x^2 + y^2 = a^2 - 2b$ i imamo ovaj sustav

$$\begin{aligned} 2(a^2 - 2b) - 3b + 2a - 39 &= 0, \\ 3(a^2 - 2b) - 4b + a - 50 &= 0. \end{aligned}$$

5 bodova

Iz prve jednadžbe je $b = \frac{2a^2+2a-39}{7}$, što uvršteno u drugu daje

$$a^2 - 13a + 40 = 0,$$

čija su rješenja $a_1 = 5$, $b_1 = 3$ i $a_2 = 8$, $b_2 = 15$. 5 bodova
Sada imamo

1° $x + y = 5$ i $xy = 3$, odnosno

$$x^2 - 5x + 3 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}, \quad y_{1,2} = \frac{5 \mp \sqrt{13}}{2}$$

5 bodova

2° $x + y = 8$ i $xy = 15$, odnosno

$$x^2 - 8x + 15 = 0, \quad \text{tj.} \quad (x-3)(x-5) = 0;$$

$$x_3 = 3, \quad y_3 = 5,$$

$$x_4 = 5, \quad y_4 = 3.$$

5 bodova

2. Neka su a i b takvi da za svaki $x \in [-1, 1]$ vrijedi nejednakost $-1 \leq 2x^2 + ax + b \leq 1$. Uvrštavajući redom $x = 0$, $x = 1$ i $x = -1$ dobivamo

$$-1 \leq b \leq 1$$

$$-3 \leq b + a \leq -1$$

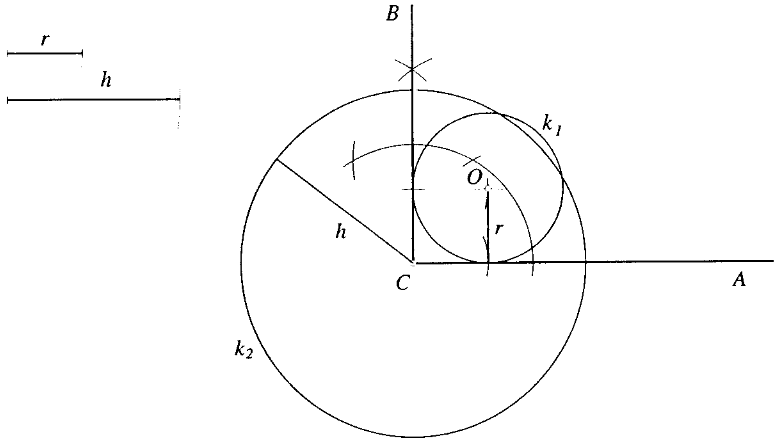
$$-3 \leq b - a \leq -1.$$

10 bodova

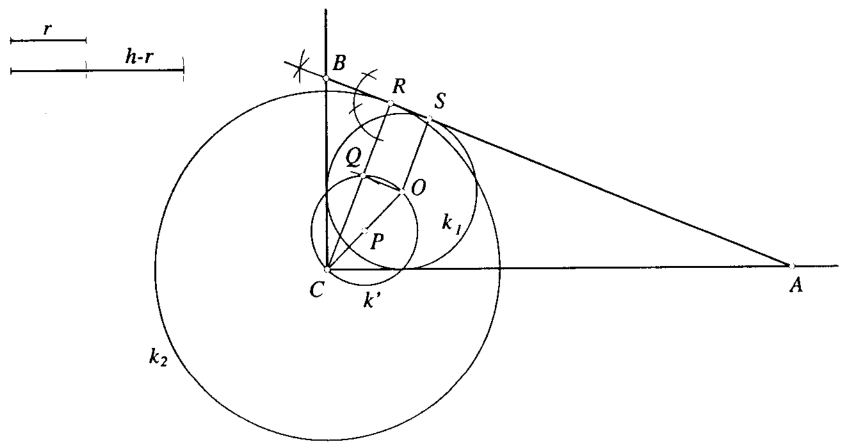
Zbrajanjem dviju posljednjih nejednakosti dobivamo $-3 \leq b \leq -1$.
Odavde i iz prve nejednakosti slijedi $b = -1$. 5 bodova

Tada a zadovoljava nejednakosti $-2 \leq a \leq 0$ i $-2 \leq -a \leq 0$, tj. $a = 0$. 5 bodova
Dakle, ako postoje brojevi a i b za koje vrijedi dana nejednakost za svaki $x \in [-1, 1]$, onda mora biti $a = 0$ i $b = -1$.
Provjerimo da ovi brojevi zadovoljavaju sve uvjete u zadatku, tj. da za svaki $x \in [-1, 1]$ vrijedi $-1 \leq 2x^2 - 1 \leq 1$. Ova nejednakost je ekvivalentna s $0 \leq 2x^2 \leq 2$, koja je ispunjena za svaki $x \in [-1, 1]$. 5 bodova

3. Najprije konstruiramo pravi kut BCA, samo pomoću šestara odredimo središte O upisane kružnice, $k_1(O, r)$, trokuta ABC i upišemo kružnicu $k_2(O, h)$, gdje je h duljina visine trokuta na hipotenuzu. Preostaje još konstruirati zajedničku tangentu kružnica k_1 i k_2. 10 bodova



Upiše se kružnica $k'(P, h - r)$ s promjerom $\overline{OC}$. Zatim na kružnici k' odredimo točku Q tako da je $|CQ| = h - r$. Pravac CQ siječe kruv znicu k_2 u točki R. Okomica na pravac CQ u točki R je zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2.



Rješenje postoji ako i samo ako je $2r < h \leq r(1+\sqrt{2})$. 15 bodova

$\left(h = r + |OC| \cos\sphericalangle QCO = r(1+\sqrt{2}\cos\sphericalangle QCO),\ 0 \leq \sphericalangle QCO < \frac{\pi}{4} \right)$

4. Zbog $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j \,|\, \overline{z_1 z_2 \ldots z_j}$, za svaki $j \geq 2$, sve znamenke $z_2, z_3, \ldots, z_n$ moraju biti parne. Uvjet (a) povlači, $n \leq 6$. 5 bodova

Zbog $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j \,|\, \overline{z_1 z_2 \ldots z_j}$ za svaki $j \geq 3$, mora biti

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod 3,$$

$$z_j \equiv 0 \pmod 3 \quad \text{za} \quad j \geq 4.$$

5 bodova

Uvjet (a) povlači $n \leq 5$, jer su za z_4 i z_5 moguće jedino znamenke 0 i 6. Slično, zbog

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j \,|\, \overline{z_1 z_2 \ldots z_j}, \quad \text{za svaki } j \geq 4, \quad \text{je } 10z_3 + z_4 \equiv 0 \pmod 4).$$

Ali, z_3 i z_4 moraju biti djeljivi s 2, z_3 i s 3, pa je jedina mogućnost $z_4 = 0$ ($z_4 = 6$ nije moguće zbog $4 \,|\, (10z_3 + z_4)$ i $z_3 \equiv 0 \pmod 4$). 5 bodova

Nadalje, $2 \,|\, z_5$, $3 \,|\, z_5$, $4 \,|\, (10z_4 + z_5)$, tj. $4 \,|\, z_5$ i $5 \,|\, z_5$. Zadovoljava jedino $z_5 = 0$, a kako znamenke moraju biti različite, dobivamo $n = 4$. 5 bodova

Dakle, $n = 4$, $z_4 = 0$, $z_3 \equiv 0 \pmod 4$, $2 \,|\, z_2$, $3 \,|\, (z_1 + z_2 + z_3)$ i $z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1$. Traženi brojevi su:

3240	5640	9840	9480
6240	8640	5280	1680
9240	3840	3480	4680
2640	6840	6480	7680

Ukupno ima 16 brojeva. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

3. travnja 1998.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$2^{2x} \leq 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}.$$

2. Koristeći se pogodnom supstitucijom odredite broj korijena jednadžbe

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$$

koji se nalaze unutar segmenta $[0,1]$.

3. U pravilnoj trostranoj piramidi kut nagiba bočnog brida prema ravnini baze jednak je plošnom kutu uz vrh piramide. Odredite volumen piramide ako je duljina brida baze jednaka a.

4. Odredite sve 200–znamenkaste prirodne brojeve (u dekadskom zapisu) koji su kvadrati prirodnih brojeva a počinju s 99 devetki.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Jednadžba ima smisla uz uvjet $x \geq 0$. 2 boda
Tada je:

$$4 \cdot 2^{2\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} - 2^{2x} \geq 0,$$

$$4 \cdot 2^{2\sqrt{x}} + 4 \cdot 2^{x+\sqrt{x}} - 2^{x+\sqrt{x}} - 2^{2x} \geq 0,$$

$$4 \cdot 2^{\sqrt{x}}(2^{\sqrt{x}} + 2^x) - 2^x(2^{\sqrt{x}} + 2^x) \geq 0,$$

$$(2^{\sqrt{x}} + 2^x)(4 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 2^x) \geq 0.$$

8 bodova

Kako je $2^{\sqrt{x}} + 2^x > 0$ za sve $x \in \mathbf{R}$, treba riješiti

$$4 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 2^x \geq 0,$$

$$2^{\sqrt{x}+2} \geq 2^x$$

$$\sqrt{x} + 2 \geq x,$$

$$x - \sqrt{x} - 2 \leq 0,$$

$$(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) \leq 0.$$

10 bodova

Odavde slijedi $\sqrt{x} \in [-1, 2]$ odnosno $\sqrt{x} \in [0, 2]$, pa je $x \in [0, 4]$ zbog uvjeta $x \geq 0$. 5 bodova

2. Odmah vidimo da $x = 0$ i $x = 1$ nisu rješenja, pa uvodimo supstituciju $x = \cos\varphi$, uz $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Jednadžba postaje

$$8\cos\varphi(1 - 2\cos^2\varphi)(8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1) = 1,$$

5 bodova

odnosno zbog $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ i $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$,

$$-8\cos\varphi\cos 2\varphi\cos 4\varphi = 1.$$

5 bodova

Pomnožimo obje strane jednadžbe sa $\sin\varphi$. (Dobivena jednadžba ekvivalentna je prethodnoj jer je $\sin\varphi \neq 0$ za $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.) 5 bodova

$$-4\sin 2\varphi \cos 2\varphi \cos 4\varphi = \sin\varphi,$$

$$-2\sin 4\varphi \cos 4\varphi = \sin\varphi,$$

$$\sin 8\varphi + \sin\varphi = 0,$$

$$2\sin\frac{9\varphi}{2}\cos\frac{7\varphi}{2} = 0,$$

pa su rješenja $\varphi = \frac{2}{9}k\pi$ i $\varphi = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}k\pi$. 5 bodova

U intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ nalaze se rješenja $\varphi = \frac{2\pi}{9}$, $\varphi = \frac{4\pi}{9}$, $\varphi = \frac{\pi}{7}$ i $\varphi = \frac{3\pi}{7}$, pa polazna jednadžba ima 4 rješenja u intervalu $[0, 1]$. 5 bodova

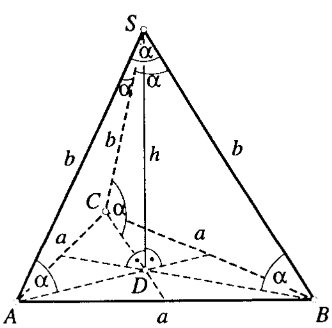
3. Neka je baza piramide trokut ABC, a vrh točka $\cancel{V}$ S, te neka je D $\cancel{S}$ središte trokuta ABC. Neka je b duljina pobočke a h visina piramide, te neka je $\sphericalangle ASB = \sphericalangle SAD = \alpha$. Tada vrijedi:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}b} \qquad (\triangle ADS),$$

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} \qquad (\triangle ADS),$$

$$a^2 = 2b^2(1 - \cos\alpha) \qquad (\triangle ABS).$$

7 bodova



Uvrštavanjem prve jednadžbe u treću dobija se

$$2b^2\sqrt{3} - 2ab - a^2\sqrt{3} = 0$$

odakle slijedi $b = \frac{a(1\pm\sqrt{7})}{2\sqrt{3}}$, pri čemu ima smisla samo $b = \frac{a(1+\sqrt{7})}{2\sqrt{3}}$. 10 bodova

Dalje je $h^2 = \frac{2+\sqrt{7}}{6}a^2$, 5 bodova pa je konačno

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{a^3}{12}\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{2}}.$$

3 boda

4. Brojevi koji imaju 200 znamenaka i počinju s 99 devetki su brojevi između $10^{200} - 10^{101}$ i $10^{200} - 1$. 5 bodova

Kako je $(10^{100})^2 = 10^{200}$ slijedi da su traženi brojevi $10^{100} - 1$ i manji. 5 bodova

Tvrdimo da su to brojevi $10^{100} - 1$, $10^{100} - 2$, $10^{100} - 3$, $10^{100} - 4$ i $10^{100} - 5$.

Dovoljno je provjeriti da je $(10^{100} - 5)^2 \geq 10^{200} - 10^{101}$ i $(10^{100} - 6)^2 < 10^{200} - 10^{101}$. 5 bodova

Zaista,

$$\begin{aligned}(10^{100} - 5)^2 &= \\ &= 10^{200} - 10 \cdot 10^{100} + 25 \\ &= 10^{200} - 10^{101} + 25 > 10^{200} - 10^{101}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(10^{100} - 6)^2 &= \\ &= 10^{200} - 12 \cdot 10^{100} + 36 \\ &= 10^{200} - 10^{101} - 2 \cdot 10^{100} + 36 < 10^{200} - 10^{101}.\end{aligned}$$

10 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

3. travnja 1998.

IV. razred

1. Tri tangente parabole određuju trokut. Dokažite da opisana kružnica tog trokuta prolazi kroz fokus parabole.

2. Niz a_n zadan je rekurzivno sa

$$\begin{aligned} a_0 &= -1, \\ a_n &= \frac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4}, \qquad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

   Odredite formulu za a_n.

3. Dokažite da ne postoji funkcija $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ koja zadovoljava ove uvjete

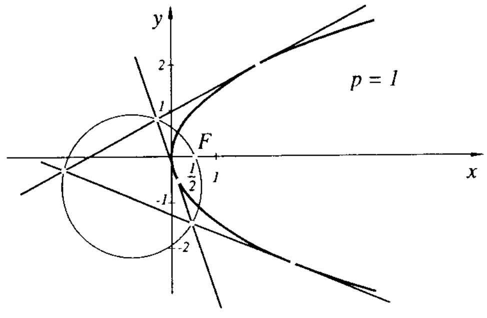
   (i) $f(1+f(x)) = 1-x$, za svaki $x \in \mathbf{R}$,

   (ii) $f(f(x)) = x$, za svaki $x \in \mathbf{R}$.

4. U kojem brojevnom sustavu $297|792$ (tj. 297 dijeli 792)?

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak nosi po 25 bodova.

1. Jednadžba tangente parabole $y^2 = 2px$ u točki (x_0, y_0) je $yy_0 = p(x + x_0)$, a njezin fokus je u točki $F = (\frac{p}{2}, 0)$.



Jednadžbe tangenata u točkama $\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$, $\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$, $\left(\frac{y_3^2}{2p}, y_3\right)$, su

$$t_1 \quad \dots \quad yy_1 = px + \frac{y_1^2}{2},$$

$$t_2 \quad \dots \quad yy_2 = px + \frac{y_2^2}{2},$$

$$t_3 \quad \dots \quad yy_1 = px + \frac{y_3^2}{2}.$$

Vrhovi trokuta su $A = t_2 \cap t_3$, $B = t_3 \cap t_1$, $C = t_1 \cap t_2$, pa iz gornjih jednadžbi dobivamo njihove koordinate

$$A\left(\frac{y_2 y_3}{2p}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right), \quad B\left(\frac{y_1 y_3}{2p}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right), \quad C\left(\frac{y_1 y_2}{2p}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

5 bodova

Središte kružnice je presjek simetrala stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Polovišta tih stranica su

$$P_1\left(\frac{y_3(y_1 + y_2)}{4p}, \frac{y_1 + y_2 + 2y_3}{4}\right), \quad P_2\left(\frac{y_2(y_1 + y_3)}{4p}, \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{4}\right).$$

Koeficijent smjera pravca AB je

$$k_{AB} = \frac{\frac{y_1+y_3}{2} - \frac{y_2+y_3}{2}}{\frac{y_1 y_3}{2p} - \frac{y_2 y_3}{2p}} = \frac{p}{y_3},$$

pa je koeficijent smjera simetrale stranice $\overline{AB}$

$$k'_{AB} = -\frac{y_3}{p}.$$

Analogno je $k_{AC} = \frac{p}{y_2}$ i $k'_{AC} = -\frac{y_2}{p}$. 5 bodova
Jednažbe simetrala stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ su

$$y = -\frac{y_3}{p}x + \frac{y_3^2(y_1+y_2)}{4p^2} + \frac{y_1+y_2+2y_3}{4}, \qquad s_{AB},$$

$$y = -\frac{y_2}{p}x + \frac{y_2^2(y_1+y_3)}{4p^2} + \frac{y_1+2y_2+y_3}{4}, \qquad s_{AC}.$$

Iz ovih dviju linearnih jednadžbi odredimo koordinate središta S kružnice opisane trokutu ABC:

$$x_S = \frac{y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3}{4p} + \frac{p}{4}, \qquad y_S = \frac{y_1+y_2+y_3}{4} - \frac{y_1y_2y_3}{4p^2}.$$

5 bodova

Polumjer kružnice je R, pri čemu je

$$\begin{aligned} R^2 &= |AS|^2 \\ &= \left(\frac{y_1y_2-y_2y_3+y_1y_3}{4p} + \frac{p}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_1y_2y_3}{4p^2} + \frac{-y_1+y_2+y_3}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

5 bodova

Sada još preostaje provjeriti da je $|SF|^2 = R^2$, gdje je $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, odnosno

$$\left(\frac{y_1y_2+y_2y_3+y_1y_3}{4p} - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2+y_3}{4} - \frac{y_1y_2y_3}{4p^2}\right)^2 = R^2.$$

5 bodova

2. Izračunajmo prvih nekoliko članova ovog niza:

$$a_1 = \tfrac{5}{7}, \quad a_2 = \tfrac{11}{13}, \quad a_3 = \tfrac{17}{19}.$$

Pretpostavimo da je točna formula

$$a_n = \frac{6n-1}{6n+1}.$$

10 bodova

Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom.
1° Za $n=1$ formula vrijedi.
2° Pretpostavimo da ona vrijedi za neki $n \geq 1$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot\frac{6n-1}{6n+1} - 3}{3\cdot\frac{6n-1}{6n+1} - 4} = \frac{6n+5}{6n+7} = \frac{6(n+1)-1}{6(n+1)+1},$$

pa tvrdnja vrijedi i za $n+1$. Prema principu matematičke indukcije, ona vrijedi za svaki $n \geq 1$.

15 bodova

3. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji funkcija $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ takva da je

$$f(1+f(x)) = 1-x, \qquad (1)$$

$$f(f(x)) = x. \qquad (2)$$

Iz (1) slijedi

$$f(f(1+f(x))) = f(1-x)$$

$$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \quad f(1-x) = 1+f(x). \qquad (3)$$

10 bodova

Odavde dobivamo

$$x=0 \Longrightarrow f(1) = 1+f(0)$$

$$x=1 \Longrightarrow f(0) = 1+f(1),$$

a zbrajanjem ovih jednakosti,

$$0=2,$$

što je nemoguće. 10 bodova

To znači da je pretpostavka bila pogrešna, tj. takva funkcija ne postoji. 5 bodova

4. Broj 792 je djeljiv s brojem 297 ako postoji prirodan broj k, takav da je $297k = 792$. Baza ovog brojevnog sustava mora biti veća od 9. Zato mora biti $k \in \{2,3\}$. 5 bodova

Ako je b baza brojevnog sustava, za $k=2$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$(2b^2+9b+7)\cdot 2 = 7b^2+9b+2 \text{ tj. } 3b^2-9b-12=0,$$

čija rješenja su $b_1=-1$ i $b_2=4$. Ne zadovoljava nijedno rješenje. 10 bodova

Za $k=3$ dobiva se kvadratna jednadžba

$$(2b^2+9b+7)\cdot 3 = 7b^2+9b+2 \text{ tj. } b^2-18b-19=0,$$

čija rješenja su $b_3=-1$ i $b_4=19$. Zadovoljava samo $b=19$. 10 bodova

Postoji samo jedna baza, $b=19$, u kojoj je broj 792 djeljiv s 297.