MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 1999.

I. razred

1. Ako su a, b i c realni brojevi, takvi da je $a \neq b \neq c \neq a$, dokažite da je

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

2. Iz bilo koje točke M unutar jednakostraničnog trokuta ABC spuštene su okomice $\overline{MH}$, $\overline{MK}$, $\overline{MP}$, na njegove stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, tim redom. Dokažite,

   (a) $|AH|^2 + |BK|^2 + |CP|^2 = |HB|^2 + |KC|^2 + |PA|^2$;

   (b) $|AH| + |BK| + |CP| = |HB| + |KC| + |PA|$.

3. Dokažite da jednadžba $5x^2 - 4y^2 = 1999$ nema nijedno cjelobrojno rješenje.

4. Nađite sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijede jednakosti

$$\begin{aligned} |x+y| &= 1, \\ |x| + |y| &= 1. \end{aligned}$$

   Prikažite skup rješenja u koordinatnoj ravnini.

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1.

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(b-a)+(a-c)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-a},$$

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-c)} = \frac{(c-b)+(b-a)}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b},$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{(a-c)+(c-b)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a}+\frac{1}{b-c}.$$

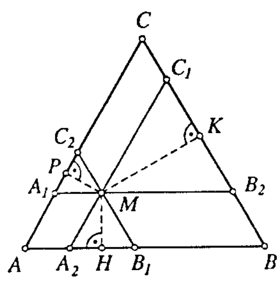
Zbrajanjem ovih jednakosti dobiva se tvrdnja zadatka. 25 bodova

2. (a) Koristeći Pitagorin poučak dobivamo

$$\begin{aligned} |AH|^2+|BK|^2+|CP|^2 &= (|AM|^2-|MH|^2)+(|BM|^2-|MK|^2) \\ &\quad +(|CM|^2-|MP|^2), \quad \text{i} \\ |HB|^2+|KC|^2+|PA|^2 &= (|BM|^2-|MH|^2)+(|CM|^2-|MK|^2) \\ &\quad +(|AM|^2-|MP|^2). \end{aligned}$$

Očito su ova dva izraza jednaka. 10 bodova

(b) Povucimo kroz točku M pravce A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2, paralelno stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.



Dužine $\overline{MH}$, $\overline{MK}$, $\overline{MP}$ su težišnice trokuta B_1MA_2, C_1MB_2, A_1MC_2 i $|AA_1| = |BB_2|$, $|BB_1| = |CC_2|$, $|CC_1| = |AA_2|$, te je

$$\begin{aligned} |AH|+|BK|+|CP| &= |AA_2|+|A_2H|+|BB_2|+|B_2K|+|CC_2|+|C_2P| \\ &= |HB_1|+|B_1B|+|KC_1|+|C_1C|+|PA_1|+|A_1A| \\ &= |HB|+|KC|+|PA|. \end{aligned}$$

15 bodova

3. *Prvo rješenje.* Pretpostavimo suprotno tvrdnji zadatka, tj. da jednadžba ima cjelobrojno rješenje. 5 bodova
Desna strana jednadžbe je neparna, pa mora biti i lijeva, tj. x je neparan broj.

5 bodova

Neka je $x = 2k - 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Tada iz dane jednadžbe izlazi

$$5 \cdot (2k-1)^2 - 4y^2 = 1999, \text{ tj.}$$

$$4 \cdot (5k^2 - 5k - y^2) = 1994.$$

Lijeva strana ove jednadžbe je djeljiva s 4, a desna nije. 10 bodova

Kako smo došli do kontradikcije, polazna jednadžba nema cjelobrojno rješenje.

5 bodova

Drugo rješenje. Broj 1999 daje ostatak 3 pri dijeljenju s 4. Izraz $4y^2$ djeljiv je s 4 (za sve $y \in \mathbf{Z}$), pa $5x^2$ mora dati ostatak 3 pri dijeljenju s 4. Pogledajmo koje ostatke možedavati kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 4. Ako je broj paran, njegov kvadrat je djeljiv s 4, a ako je neparan, njegov kvadrat daje ostatak 1 pri dijeljenju s 4. Stoga x^2 ne može davati ostatak 3, pa niti $5x^2$ ne može davati ostatak 3 pri dijeljenju s 4. Stoga postavljena jednadžba nema cjelobrojno rješenje. 25 bodova

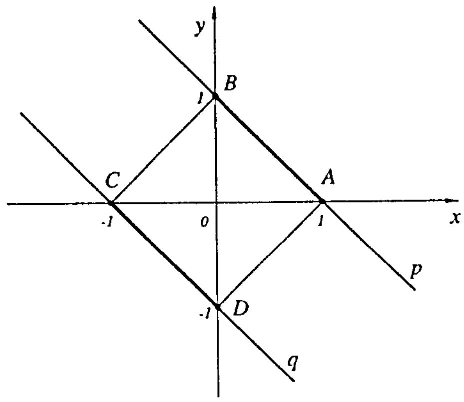
4. Najprije ćemo naći skup točaka za koje je $|x+y| = 1$, a zatim skup točaka za koje je $|x| + |y| = 1$. Presjek ova dva skupa će biti traženi skup točaka. 5 bodova

a) $|x+y| = 1$:

1° $x + y \geq 0 \Rightarrow x + y = 1$. Zadovoljavaju točke pravca $x + y = 1$.

2° $x + y \leq 0 \Rightarrow -x - y = 1$. Zadovoljavaju točke pravca $-x - y = 1$.

Pod a) zadovoljavaju točke pravaca p i q. (Vidi sliku.) 5 bodova



b) (Vidi sliku.) $|x| + |y| = 1$:

1° $x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow x + y = 1$. Zadovoljavaju točke dužine $\overline{AB}$.

2° $x \leq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow -x + y = 1$. Zadovoljavaju točke dužine $\overline{BC}$.

3° $x \leq 0,\ y \leq 0 \Rightarrow -x - y = 1$. Zadovoljavaju točke dužine $\overline{CD}$.

4° $x \geq 0,\ y \leq 0 \Rightarrow x - y = 1$. Zadovoljavaju točke dužine $\overline{DA}$.

10 bodova

Presjek ova dva skupa točaka je $\overline{AB} \cup \overline{CD}$. 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 1999.

II. razred

1. Odredite sve parove prirodnih brojeva x i y za koje vrijedi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1999}.$$

2. Ako je $abc \neq 0$, da li je moguće da svaka od ove tri jednadžbe

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0, \\ cx^2+ax+b &= 0, \\ bx^2+cx+a &= 0, \end{aligned}$$

ima realna rješenja?

3. Neka je ABC trokut kod kojeg je $|AB| < |AC|$ i neka je D polovište onog luka $\widehat{BC}$ kružnice opisane tome trokutu na kojem leži točka A. Dokažite da za nožište E, okomice iz točke D na stranicu $\overline{AC}$, vrijedi jednakost

$$|AB|+|AE|=|EC|.$$

4. Prikažite u kompleksnoj ravnini skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi

$$|z+c|=|z-c|,$$

gdje je $c \neq 0$ zadani kompleksni broj.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Zadanu jednadžbu napišimo u obliku

$$1999(x+y)=xy.$$

Odavde zaključujemo da je barem jedan od brojeva x, y djeljiv s 1999 (jer je 1999 prost broj). Budući da je jednadžba simetrična, možemo uzeti da je to y, tj. $y = 1999z$, $z \in \mathrm{N}$. 5 bodova
Posljednja jednadžba prelazi u

$$1999(x+1999z)=1999xz, \quad \text{tj.} \quad x(z-1)=1999z.$$

5 bodova

Odavde je $x=\dfrac{1999z}{z-1}$, što možemo prikazati kao

$$x=\frac{1999z-1999+1999}{z-1}, \quad \text{odnosno} \quad x=1999+\frac{1999}{z-1}.$$

5 bodova
Kako je $x \in \mathrm{N}$, mora biti $z-1 \in \{1, 1999\}$ (ponovo smo koristili činjenicu da je 1999 prost broj). Dalje je $z_1 = 2$, $z_2 = 2000$, odakle je $x_1 = 3998$, $x_2 = 2000$; $y_1 = 3998$, $y_2 = 3998000$. Iz toga zaključujemo da su, zbog simetričnosti, sva rješenja dane jednadžbe, $(x, y) \in \{(3998, 3998), (2000, 3998000), (3998000, 2000)\}$. 10 bodova

Ne odgovara zadatku!
Ali je $abc \neq 0$, moguće
je da neka od zadanih
jednadžbi ima realna
rješenja!

2. Pretpostavimo da svaka jednadžba ima realna rješenja. 5 bodova
Tada je diskriminanta svake od njih nenegativna, tj.

$$b^2 \geq 4ac, \quad a^2 \geq 4bc, \quad c^2 \geq 4ab.$$

Ne vrijedi
općenito!

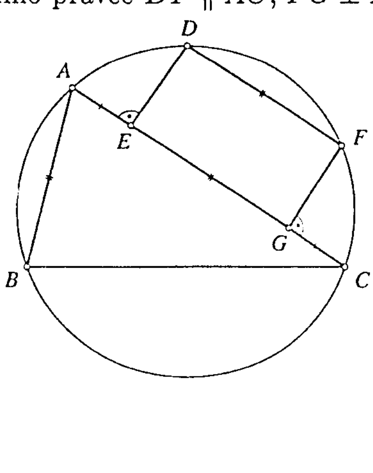
5 bodova

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo

$$a^2b^2c^2 \geq 64a^2b^2c^2,$$

što nije istina, jer je $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $c \neq 0$. 10 bodova
Ova kontradikcija znači da polazna pretpostavka nije istinita, tj. barem jedan od polinoma ima čisto kompleksno rješenje. 5 bodova

3. *Prvo rješenje.* Povucimo pravce $DF \parallel AC$, $FG \perp AC$, kao na slici. 5 bodova



Kako je

$$\widehat{BD} = \widehat{DC} \text{ i } \widehat{AD} = \widehat{FC} \quad \Rightarrow \quad \widehat{BA} = \widehat{DF},$$

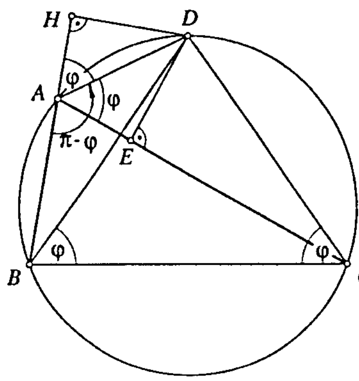
odakle je $|AB| = |DF| = |EG|$. 10 bodova

Nadalje, $\widehat{AD} = \widehat{FC} \quad \Rightarrow \quad |AD| = |FC| \quad \Rightarrow \quad |AE| = |GC|$, odakle slijedi

$$|AB| + |AE| = |EG| + |GC| = |EC|.$$

10 bodova

Drugo rješenje. Neka je $DH \perp AB$, kao na slici.



Neka je $\varphi = \sphericalangle DBC = \sphericalangle BCD$. Zbog jednakosti obodnih kutova nad istom tetivom, je $\sphericalangle DAC = \varphi$. Kako je $ABCD$ tetivni četverokut, to je $\sphericalangle HAD = 180° - \sphericalangle DAB = 180° - (180° - \sphericalangle BCD) = \varphi$. Odavde su trokuti ADH i ADE sukladni ($|AD| = |AD|$, $\sphericalangle HAD = \sphericalangle EAD = \varphi$, $\sphericalangle DHA = \sphericalangle DEA = 90°$), pa je $|AH| = |AE|$ i $|DH| = |DE|$. 15 bodova

Zbog $|DH| = |DE|$, $\sphericalangle HBD = \sphericalangle ECD$ (obodni kutevi nad istim lukom $\widehat{AD}$), $\sphericalangle DHB = \sphericalangle DEB = 90°$ trokuti BDH i CDE su sukladni, pa je $|BH| = |EC|$. Sada je

$$|AB| + |AE| = |AB| + |AH| = |BH| = |EC|.$$

10 bodova

4. *Prvo rješenje.* Iz dane jednakosti dobivamo

$$(z + c)(\bar{z} + \bar{c}) = (z - c)(\bar{z} - \bar{c}),$$

$$c\bar{z} + \bar{c}z = 0.$$

5 bodova

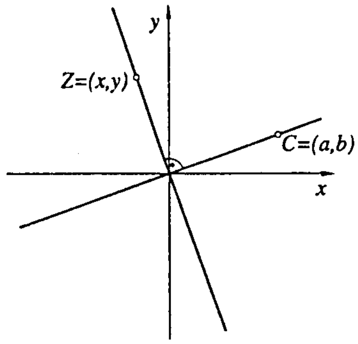
Stavljajući $c = a + ib$, $z = x + iy$, dobivamo

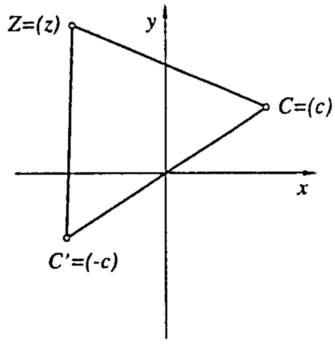
$$(a + ib)(x - iy) + (a - ib)(x + iy) = 0, \quad \text{tj.} \quad ax + by = 0.$$

Za $a \neq 0$ zapišimo ovu jednakost u obliku

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{b}{a} = -1. \qquad (*)$$

10 bodova





Kompleksnim brojevima 0, c, z pripadaju točke O, C, Z, pa je $\frac{b}{a}$ koeficijent smjera pravca OC, a $\frac{y}{x}$ je koeficijent smjera pravca OZ. Iz jednakosti $(*)$ slijedi da točke z moraju biti na pravcu kroz ishodište koji je okomit na pravac OC.
Za $a = 0$, $b \neq 0$, očito je $y = 0$, pa je $z \in \mathbf{R}$. 10 bodova

Drugo rješenje. Uz točku $C = (c)$ promatrajmo točku $C' = (-c)$. Tada uvjet $|z + c| = |z - c|$ znači $|C'Z| = |CZ|$, što znači da je točka $Z = (z)$ na simetrali dužine $\overline{CC'}$. 25 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 1999. godine

III. razred

1. U skupu realnih brojeva riješite jednadžbu

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x}\right) = \operatorname{sgn} \log_x 1999^{\sqrt{1-x}},$$

pri čemu je

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

2. Ako je

$$x + x^{-1} = 2\cos 40^\circ,$$

dokažite da je

$$x^4 + x^{-4} = 2\cos 160^\circ.$$

3. Dokažite da sjecište visina šiljastokutnog trokuta ABC s danim kutevima α, β i γ, dijeli njegovu visinu iz vrha A u omjeru $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}$.

4. Neka su a i b duljine dvaju mimoilaznih bridova trostrane piramide koji su međusobno okomiti, i neka je d njihova udaljenost. Odredite volumen te piramide.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Jednadžba ima smisla za $x > 0$, $x \neq 1$, $1 - x \geq 0$. Dakle, $x \in (0,1)$. 5 bodova
Stoga je $\log_x 1999^{\sqrt{1-x}} < 0$, 5 bodova
pa imamo:

$$\log_{\frac{1}{3}}(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x}) = -1$$

$$4^{2\cos^2 x - 1} + 4^{\cos^2 x} = 3.$$ 5 bodova

Nakon množenja s 4, uz supstituciju $t = 4^{\cos^2 x}$, dobivamo $t^2 + 4t - 12 = 0$. Zbog $t > 0$, jedino rješenje je $t = 2$. 5 bodova
Dalje imamo $4^{\cos^2 x} = 2$, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Zbog uvjeta jedino rješenje je $x = \frac{\pi}{4}$. 5 bodova

2. *Prvo rješenje:* Kvadriranjem dobivamo

$$x^2 + 2 + x^{-2} = 4\cos^2 40°,$$ 10 bodova

odnosno

$$x^2 + x^{-2} = 4\cos^2 40° - 2 = 2(2\cos^2 40° - 1) = 2\cos 80°.$$ 10 bodova

Ponovimo li još jednom isti postupak dobit ćemo

$$x^4 + x^{-4} = 4\cos^2 80° - 2 = 2\cos 160°.$$ 5 bodova

Drugo rješenje: Množenjem dane jednakosti sa x dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 - 2x\cos 40° + 1 = 0$, čija su rješenja

$$x_{1,2} = \cos 40° \pm \sqrt{\cos^2 40° - 1} = \cos 40° \pm i\sin 40°.$$ 5 bodova

Računamo:

$$x^2 = \cos^2 40° - \sin^2 40° \pm 2i\cos 40° \sin 40° = \cos 80° \pm i\sin 80°.$$

5 bodova

Ponovnim kvadriranjem dobivamo $x^4 = \cos 160° \pm i\sin 160°$. 5 bodova
Sada je

$$x^{-4} = \frac{1}{\cos 160° \pm i\sin 160°} \cdot \frac{\cos 160° \mp i\sin 160°}{\cos 160° \mp i\sin 160°} = \cos 160° \mp i\sin 160°.$$

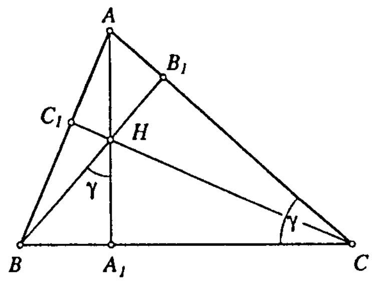
5 bodova

Konačno,

$$x^4 + x^{-4} = (\cos 160° \pm i\sin 160°) + (\cos 160° \mp i\sin 160°) = 2\cos 160°.$$

5 bodova

3. Sve ćemo potrebne veličine izraziti pomoću kuteva i duljine stranice c. (Moguće je i pomoću a ili b ili pomoću polumjera opisane kružnice R.) Koristit ćemo oznake kao na slici.



Iz $\triangle AA_1B$ imamo $|AA_1| = c\sin\beta$, $|BA_1| = c\cos\beta$. 5 bodova

Iz $\triangle BHA_1$, zbog $\sphericalangle BHA_1 = \gamma$, je $|HA_1| = |BA_1|\mathrm{ctg}\gamma = c\cos\beta\mathrm{ctg}\gamma$. 5 bodova

Sada možemo nastaviti na dva načina:

Prvi način. Slično, iz $\triangle AB_1B$ je $|AB_1| = c\cos\alpha$, a iz $\triangle AHB_1$, zbog $\sphericalangle AHB_1 = \gamma$, $|AH| = \dfrac{|AB_1|}{\sin\gamma} = \dfrac{c\cos\alpha}{\sin\gamma}$.

Dakle,

$$\frac{|AH|}{|HA_1|} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{1}{c\cos\beta\mathrm{ctg}\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

15 bodova

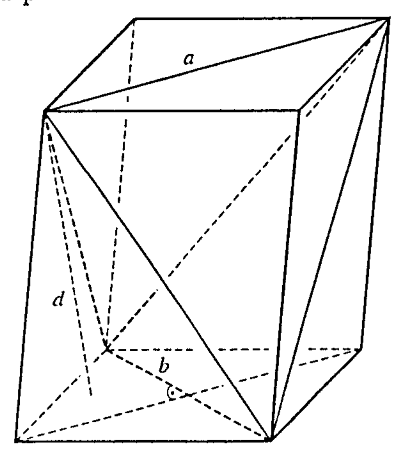
Drugi način. $|AH| = |AA_1| - |HA_1| = c(\sin\beta - \cos\beta\mathrm{ctg}\gamma)$ pa je

$$\frac{|AH|}{|HA_1|} = \frac{\sin\beta - \cos\beta\mathrm{ctg}\gamma}{\cos\beta\mathrm{ctg}\gamma} = \frac{\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \frac{-\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\cos(\pi-\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}.$$

15 bodova

4. Uložimo piramidu u prizmu kao na slici.



5 bodova

Osnovica ove prizme je četverokut s okomitim dijagonalama duljina a i b, a duljina visine je d, pa je njezin volumen $V_1 = \frac{1}{2}abd$. 5 bodova

Traženi volumen piramide dobivamo oduzimanjem volumena četiri trostrane piramide.

5 bodova

Volumen svake od njih iznosi $V_2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\frac{ab}{2}) \cdot d = \frac{1}{12}abd.$ 5 bodova

Traženi volumen je $V = V_1 - 4V_2 = \frac{1}{6}abd.$ 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

5. ožujka 1999. godine

IV. razred

1. Nađite duljinu zajedničke tetive kružnica

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0.$$

Koliko ima zajedničkih tangenata? Nađite njihove jednadžbe, kao i udaljenosti između njihovih dirališta s kružnicama.

2. (a) Rastavite na faktore izraz $n^4 + 4$.

   (b) Dokažite

$$\frac{(1^4 + \frac{1}{4})(3^4 + \frac{1}{4})(5^4 + \frac{1}{4}) \cdots (11^4 + \frac{1}{4})}{(2^4 + \frac{1}{4})(4^4 + \frac{1}{4})(6^4 + \frac{1}{4}) \cdots (12^4 + \frac{1}{4})} = \frac{1}{313}.$$

3. Neka je $0 < a < b < c < d$. Dokažite da je $a^b b^c c^d d^a \geq b^a c^b d^c a^d$.

4. Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ definiran je ovako:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_n &= \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}), \quad n > 1 \end{aligned}$$

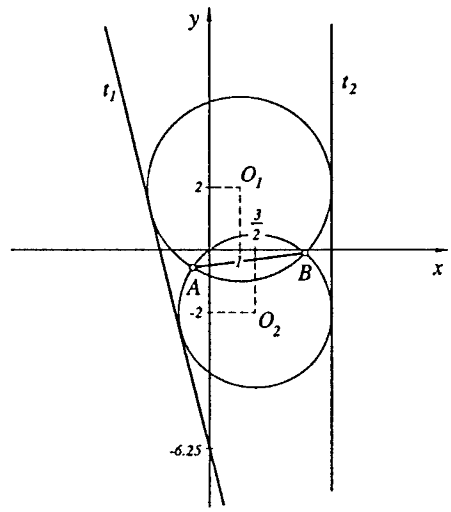
Odredite a_{1999}.

Rješenja zadataka za IV. razred

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. a) Nađimo najprije duljinu zajedničke tetive.
Oduzimanjem jednadžbi ovih kružnica dobivamo

$$x - 8y - 4 = 0, \quad \text{tj.} \quad x = 8y + 4. \tag{1}$$



2 boda

Uvrštavanjem u jednadžbu druge kružnice, nakon sređivanja, dobivamo

$$65y^2 + 44y + 4 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$y_1 = \frac{-22 - 4\sqrt{14}}{65}, \quad y_2 = \frac{-22 + 4\sqrt{14}}{65},$$

pa iz jednadžbe (1) slijedi

$$x_1 = \frac{84 - 32\sqrt{14}}{65}, \quad x_2 = \frac{84 + 32\sqrt{14}}{65}.$$

Dujinu tetive $\overline{AB}$, izračunat ćemo po formuli $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, pri čemu je $A = (x_1, y_1) = \left(\frac{84 - 32\sqrt{14}}{65}, \frac{-22 - 4\sqrt{14}}{65}\right)$,
$B = (x_2, y_2) = \left(\frac{84 + 32\sqrt{14}}{65}, \frac{-22 + 4\sqrt{14}}{65}\right)$ je $d = 8\sqrt{\frac{14}{65}}$. 10 bodova

Opći oblik jednadžbe tangente je $y = kx + l$. Ovaj pravac je tangenta kružnice

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \tag{2}$$

ako je

$$r^2(1 + k^2) = (q - kp - l)^2. \tag{3}$$

Primijenimo ovo na dane kružnice, napisane u obliku

$$(x-1)^2+(y-2)^2=9 \quad \text{i} \quad (x-\frac{3}{2})^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}.$$

Iz

$$9(1+k^2)=(2-k-l)^2 \ \text{i}\ \frac{25}{4}(1+k^2)=(-2-\frac{3}{2}k-l)^2, \tag{4}$$

dijeljenjem i vađenjem drugog korijena, dobivamo

$$5(2-k-l)=\pm 6(2+\frac{3}{2}k+l).$$ 5 bodova

Dobivamo dvije vrijednosti za koeficijent l, $l_1=\frac{-14k-2}{11}$ i $l_2=-4k-22$.
Uvrštavanjem prve vrijednosti u jednu od jednadžbi (4) dobivamo kvadratnu jednadžbu po k koja nema realno rješenje.
Uvrštavanjem druge vrijednosti u jednu od jednadžbi (4) dobivamo $k=-\frac{63}{16}$ pa je $l=-\frac{25}{4}$. Jednadžba jedne zajedničke tangente je $y=-\frac{63}{16}x-\frac{25}{4}$. 5 bodova
Znamo da dvije kružnice koje se sijeku imaju dvije zajedničke tangente. Druga tangenta, dakle, nije oblika $y=ax+b$, već $x=$konst. Očito je (vidi sliku), to pravac $x=4$. 3 boda

2. (a)

$$\begin{aligned} n^4+4 &= n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2 \\ &= (n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=((n-1)^2+1)((n+1)^2+1). \end{aligned}$$

5 bodova

(b) U izrazu na lijevoj strani pomnožimo svaku zagradu s 2^4 (sama vrijednost izraza se time ne mijenja):

$$\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots(22^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots(24^4+4)}.$$ 5 bodova

Sada na svaku zagradu primijenimo rezultat iz (a):

$$\frac{(1^2+1)(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)(11^2+1)\cdots(21^2+1)(23^2+1)}{(3^2+1)(5^2+1)(7^2+1)(9^2+1)(11^2+1)(13^2+1)\cdots(23^2+1)(25^2+1)}.$$

10 bodova

Nakon skraćivanja ostaje konačno $\frac{2}{25^2+1}=\frac{1}{313}$. 5 bodova

3. Uz dani uvjet nejednakost je redom ekvivalentna sa

$$\log(a^b b^c c^d d^a)-\log(b^a c^b d^c a^d)\geq 0,$$

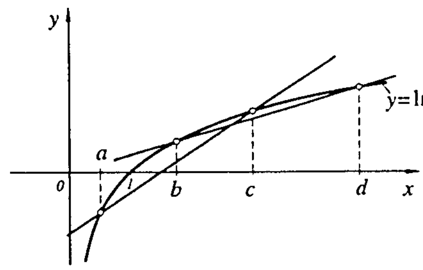
$$b\log a+c\log b+d\log c+a\log d-a\log b-b\log c-c\log d-d\log a\geq 0,$$ 5 bodova

$$b(\log a-\log c)+c(\log b-\log d)+d(\log c-\log a)+a(\log d-\log b)\geq 0,$$

$$(d-b)(\log c-\log a)-(c-a)(\log d-\log b)\geq 0,$$

$$\frac{\log c-\log a}{c-a}\geq\frac{\log d-\log b}{d-b}$$ 10 bodova

Lijeva i desna strana posljednje nejednakosti su koeficijenti smjerova pravaca kroz točke $(a,\log a)$ i $(c,\log c)$; odnosno $(b,\log b)$ i $(d,\log d)$. 5 bodova
Zbog $0<a<b<c<d$ posljednja nejednakost je istinita jer prvi pravac ima veći koeficijent smjera (vidi sliku). 5 bodova



4. Najprije odredimo nekoliko prvih članova niza.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 &&= 2 \cdot \tfrac{1}{2}, \\ a_2 &= 3 &&= 3 \cdot 1, \\ a_3 &= 8 &&= 4 \cdot 2, \\ a_4 &= 20 &&= 5 \cdot 4, \\ a_5 &= 48 &&= 6 \cdot 8, \end{aligned}$$

Primijetimo da svi ovi članovi zadovoljavaju formulu: $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$. (*)
Dokažimo da je to opća formula ovog niza. 5 bodova
Koristimo metodu matematičke indukcije.
Baza: za $n = 1$, $a_1 = (1+1) \cdot 2^{1-2} = 1$.
Pretpostavimo da formula (*) vrijedi za sve $k = 1, \dots n$. 5 bodova
Treba dokazati da je $a_{n+1} = (n+2) \cdot 2^{n-1}$:

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \frac{n+2}{n}(1 + 3 + 4 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + (n+1) \cdot 2^{n-2})$$

5 bodova

Sada možemo nastaviti na dva načina.

Prvi način: Uočimo da je dovoljno pokazati da vrijedi

$$1 + 3 + 4 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + \cdots + (n+1) \cdot 2^{n-2} = n \cdot 2^{n-1}. \qquad (**)$$

Ovo ćemo pokazati metodom matematičke indukcije:
Baza: $1 = 1 \cdot 2^{1-1}$.
Pretpostavimo da vrijedi (**). Tada je

$$1{+}3{+}\ldots{+}(n{+}1){\cdot}2^{n-2}{+}(n{+}2){\cdot}2^{n-1} = n{\cdot}2^{n-1}{+}(n{+}2){\cdot}2^{n-1} = (2n{+}2){\cdot}2^{n-1} = (n{+}1){\cdot}2^{n}.$$

Time smo dokazali (**) pa i (*).
Dakle, $a_{1999} = 2000 \cdot 2^{1997}$. 10 bodova

Drugi način: Izračunajmo izraz u zagradi

$$S = 2 \cdot 2^{-1} + 3 \cdot 2^0 + 4 \cdot 2^1 + \ldots + n \cdot 2^{n-3} + (n+1)2^{n-2}$$

Tada je

$$2S = 2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \ldots + n \cdot 2^{n-2} + (n+1) \cdot 2^{n-1}.$$

Oduzimanjem dobivamo

$$\begin{aligned} S = 2S - S &= -1 - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2}) + (n+1) \cdot 2^{n-1} \\ &= -1 - \tfrac{2^{n-1}-1}{2-1} + (n+1) \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Konačno $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot S = (n+2) \cdot 2^{n-1}$, što je i trebalo dokazati.
Dakle, $a_{1999} = 2000 \cdot 2^{1997}$. 10 bodova