ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10. – 13. svibnja 2000. godine

I. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$$

u skupu prirodnih brojeva.

2. Kružnica upisana u trokut ABC dodiruje njegove stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama A_1, B_1, C_1. Izrazite kutove trokuta $A_1B_1C_1$ pomoću kutova trokuta ABC.

3. Neka je $m \geq 2$ prirodan broj. Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima jednadžba

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor \quad ?$$

($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

4. Na raspolaganju su kovanice od 1, 2, 5, 10, 20, 50 lipa i od 1 kune. Dokažite da ako se iznos od M lipa može isplatiti pomoću N kovanica, onda se iznos od N kuna može isplatiti pomoću M kovanica.

Rješenja za I. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Ako je $x \geq 3$ i $y \geq 3$ onda je

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{z} < 1.$$

To znači da mora biti $x \leq 2$ ili $y \leq 2$.

1° Neka je $x \leq 2$.

(1) Za $x = 1$ dobivamo $3y = 2z$, tj. $y = 2k$, $z = 3k$, gdje je $k \in \mathbf{N}$. U ovom slučaju su rješenja $(1, 2k, 3k)$, $k \in \mathbf{N}$.

(2) Za $x = 2$ dobivamo

$$\frac{2}{y} - \frac{3}{z} = \frac{1}{2}, \quad \text{odakle je} \quad \frac{2}{y} > \frac{1}{2}, \quad \text{tj.} \quad y < 4.$$

Ovdje su rješenja: $(2,1,2)$, $(2,2,6)$, $(2,3,18)$.

2° Neka je $y \leq 2$.

(1) Za $y = 1$ dobivamo $\frac{1}{x} + 2 - \frac{3}{z} = 1$, odnosno,

$$x = -1 + \frac{3}{3-z}.$$

Odavde je $z = 2$, $x = 2$, pa je rješenje $(2,1,2)$.

(2) Za $y = 2$ je $\frac{1}{x} - \frac{3}{z} = 0$, tj. $z = 3x$, pa slijedi, $x = k$, $z = 3k$, $k \in \mathbf{N}$. Dakle, rješenja su $(k, 2, 3k)$, $k \in \mathbf{N}$ (to obuhvaća i ranije nađeno rješenje $(2,2,6)$).

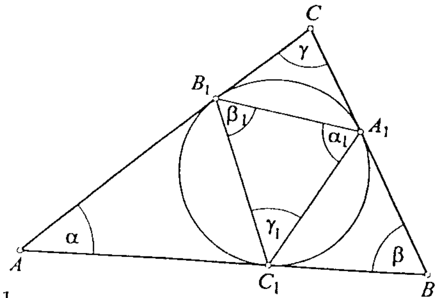
2. Trokuti AC_1B_1, BA_1C_1, CB_1A_1 su jednakokračni, pa je

$$\sphericalangle BA_1C_1 = \sphericalangle BC_1A_1 = 90° - \frac{1}{2}\beta,$$

$$\sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle CA_1B_1 = 90° - \frac{1}{2}\gamma,$$

odakle je

$$\alpha_1 = 180° - \sphericalangle BA_1C_1 - \sphericalangle CA_1B_1 = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90° - \frac{1}{2}\alpha.$$



Analogno je $\beta_1 = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $\gamma_1 = 90° - \frac{1}{2}\gamma$.

3. Jednakost $\lfloor x \rfloor = a$ znači $a \le x < a+1$.

Rješenja jednadžbe $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor = 0$ su $x = 1, 2, \ldots, m-2$.

Za $1 \le k \le m-2$ rješenja jednadžbe $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor = k$ su km, $km+1$, ..., $(k+1)(m-1)-1$ pa ih ima $(k+1)(m-1)-1-km+1 = m-k-1$.

Za $k \ge m-1$ jednadžba $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor = k$ nema rješenja, jer ako je $x \ge m(m-1)$, onda je

$$\frac{x}{m-1} - \frac{x}{m} = \frac{x}{m(m-1)} \ge 1,$$

pa je $\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor \ne \left\lfloor \frac{x}{m-1} \right\rfloor = k$.

Dakle, ukupan broj rješenja u skupu prirodnih brojeva je

$$\begin{aligned}(m-2) + \sum_{k=1}^{m-2} (m-k-1) &= (m-2) + (m-2) + (m-3) + \ldots + 1 \\ &= \frac{m(m-1)}{2} - 1.\end{aligned}$$

4. Neka se iznos od M lipa može isplatiti pomoću N kovanica i to:

a_1	od	1 lipe
a_2	od	2 lipe
a_5	od	5 lipa
a_{10}	od	10 lipa
a_{20}	od	20 lipa
a_{50}	od	50 lipa
a_{100}	od	1 kune

Tada je

$$\begin{aligned}1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 5 \cdot a_5 + 10 \cdot a_{10} + 20 \cdot a_{20} + 50 \cdot a_{50} + 100 \cdot a_{100} &= M \\ a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} + a_{100} &= N,\end{aligned}$$

ali tada je i

$$1 \cdot (a_1) + \frac{1}{2}(2 \cdot a_2) + \frac{1}{5}(5 \cdot a_5) + \frac{1}{10}(10 \cdot a_{10}) + \frac{1}{20}(20 \cdot a_{20})$$

$$+ \frac{1}{50}(50 \cdot a_{50}) + \frac{1}{100}(100 \cdot a_{100}) = N.$$

To znači da se pomoću M kovanica, i to

a_1	od	1 kune
$2a_2$	od	50 lipa
$5a_5$	od	20 lipa
$10a_{10}$	od	10 lipa
$20a_{20}$	od	5 lipa
$50a_{50}$	od	2 lipe
$100a_{100}$	od	1 lipe

može isplatiti iznos od N kuna.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10. – 13. svibnja 2000. godine

II. razred

1. Neka je a pozitivan realan broj, a x_1, x_2, x_3 realni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Dokažite nejednakost

$$\log_2(1 + a^{x_1}) + \log_2(1 + a^{x_2}) + \log_2(1 + a^{x_3}) \geq 3.$$

2. Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ACXE$ i $CBDY$. Dokažite da se pravci AD i BE sijeku na visini iz vrha C trokuta ABC.

3. Neka su j i k prirodni brojevi. Dokažite da nejednakost

$$\lfloor (j+k)\alpha \rfloor + \lfloor (j+k)\beta \rfloor \geq \lfloor j\alpha \rfloor + \lfloor j\beta \rfloor + \lfloor k(\alpha + \beta) \rfloor$$

vrijedi za sve realne brojeve α i β ako i samo ako je $j = k$.

($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

4. U unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ stranice duljine 20, dane su točke T_i, $i = 1, 2, ..., 2000$, tako da nikoje tri točke u skupu $S = \{A, B, C, D\} \cup \{T_i : i = 1, 2, ..., 2000\}$ nisu kolinearne. Dokažite da postoji barem jedan trokut, s vrhovima u skupu S, površine manje od $\frac{1}{10}$.

Rješenja za II. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Jednakost koju treba dokazati zapišimo u ekvivalentnom obliku

$$\log_2\left[(1+a^{x_1})(1+a^{x_2})(1+a^{x_3})\right] \geq \log_2 8,$$

ili

$$(1+a^{x_1})(1+a^{x_2})(1+a^{x_3}) \geq 8.$$

Ovu nejednakost možemo dokazati na dva načina.

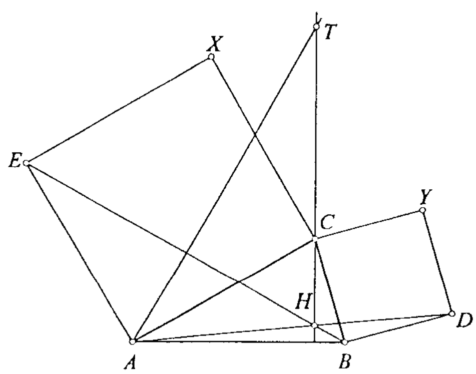
Prvi način. Primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine lijeva strana je veća ili jednaka od

$$2\sqrt{a^{x_1}}\cdot 2\sqrt{a^{x_2}}\cdot 2\sqrt{a^{x_3}} = 8\sqrt{a^{x_1+x_2+x_3}} = 8.$$

Drugi način. Množenjem i grupiranjem, uvažavajući $x_1+x_2+x_3=0$, dobivamo:

$$\begin{aligned}(1+a^{x_1})(1+a^{x_2})(1+a^{x_3}) &= 1+a^{x_1}+a^{x_2}+a^{x_3}\\ &\quad +a^{x_1+x_2}+a^{x_2+x_3}+a^{x_3+x_1}+a^{x_1+x_2+x_3}\\ &= 2+(a^{x_1}+a^{-x_1})+(a^{x_2}+a^{-x_2})+(a^{x_3}+a^{-x_3})\\ &\geq 2+2+2+2=8.\end{aligned}$$

2. Neka je $H = AD\cap BE$, a T točka takva da je $AT \perp EB$ i $CT \perp AB$. Tada su trokuti EAB i ACT sukladni ($|EA|=|AC|$, $\sphericalangle BEA = \sphericalangle TAC$ i $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ACT$). Slijedi $|CT| = |AB|$.



Neka je T' točka takva da je $BT' \perp AD$ i $CT' \perp AB$. Na sličan način zaključujemo da je $\triangle ABD \cong \triangle T'CD$, $|CT'| = |AB|$. Stoga je $|CT| = |CT'|$, odnosno $T \equiv T'$.

U trokutu ABT pravci BE, AD i TC su visine. Stoga je H njegov ortocentar i on leži na pravcu CT, tj. na visini na stranicu AB trokuta ABC.

3. 1° Neka je $j = k$. Stavimo: $x = j\alpha$, $y = j\beta$. Treba dokazati

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor.$$

Neka je $x = \lfloor x \rfloor + x'$, $y = \lfloor y \rfloor + y'$. Tada je ova nejednakost ekvivalentna sa

$$\lfloor 2x' \rfloor + \lfloor 2y' \rfloor \geq \lfloor x' \rfloor + \lfloor y' \rfloor + \lfloor x' + y' \rfloor.$$

Ako je $x' < \frac{1}{2}$ i $y' < \frac{1}{2}$, imamo $0 \geq 0$;
ako je $x' < \frac{1}{2}$ i $y' \geq \frac{1}{2}$ ili $x' \geq \frac{1}{2}$ i $y' < \frac{1}{2}$, imamo $1 \geq \lfloor x' + y' \rfloor$, što očito vrijedi;
ako je $x' \geq \frac{1}{2}$ i $y' \geq \frac{1}{2}$, imamo $2 \geq 1$.

Dakle, za $j = k$ nejednakost vrijedi.

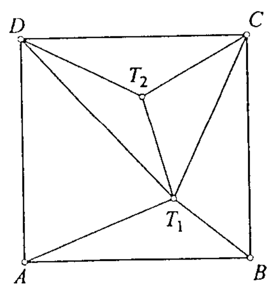
2° Neka je $j \neq k$. Dovoljno je pronaći realne brojeve α i β za koje nejednakost ne vrijedi. Ako je $j < k$, onda za $\alpha = \beta = \frac{1}{2k}$ vrijedi

$$\lfloor (j+k)\alpha \rfloor + \lfloor (j+k)\beta \rfloor = 0 + 0 = 0 < \lfloor j\alpha \rfloor + \lfloor j\beta \rfloor + \lfloor k\alpha + k\beta \rfloor = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Ako je $j > k$, onda za $\alpha = \frac{1}{j}$, $\beta = -\frac{1}{j}$ vrijedi

$$\lfloor (j+k)\alpha \rfloor + \lfloor (j+k)\beta \rfloor = 1 - 2 = -1 < \lfloor j\alpha \rfloor + \lfloor j\beta \rfloor + \lfloor k\alpha + k\beta \rfloor = 1 - 1 + 0 = 0.$$

4. Konstruirajmo skup trokuta. Najprije spojimo točku T_1 s vrhovima kvadrata čime dobivamo četiri trokuta. Spajanjem točke T_2 s vrhovima trokuta u kojem leži, taj trokut dijelimo na tri, pa se ukupan broj trokuta poveća za dva. Ovaj postupak nastavimo. U svakom koraku se ukupan broj trokuta povećava za 2, budući da nikoje tri točke nisu kolinearne. Nakon dodavanja točke T_{2000} ukupan broj trokuta bit će $4 + 1999 \cdot 2 = 4002$. Ako bi površina svakog od njih bila veća ili jednaka od $\dfrac{1}{10}$, površina kvadrata bi bila barem $4002 \cdot \dfrac{1}{10} > 400$, što nije moguće. Zato mora postojati barem jedan tr okut čija površina je manja od $\dfrac{1}{10}$.



ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10. - 13. svibnja 2000. godine

III. razred

1. Dane su točke B i C, dok je A varijabilna, takva da je $\sphericalangle BAC$ fiksan. Polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ su točke D i E redom. Točke F i G su takve da je $DF \perp AB$ i $EG \perp AC$, a BF i CG su okomite na BC. Dokažite da umnožak $|BF| \cdot |CG|$ ne ovisi o položaju točke A.

2. Pet različitih četveroznamenkastih brojeva koji počinju s istom znamenkom imaju svojstvo da četiri od njih dijele zbroj svih pet brojeva. Nađite sve takve petorke.

3. Kvadar je presječen ravninom tako da je presjek pravilni šesterokut. Dokažite da je to moguće samo ako je kvadar kocka.

4. Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi ova jednakost

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \ldots + \lfloor \log_n n \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \ldots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor.$$

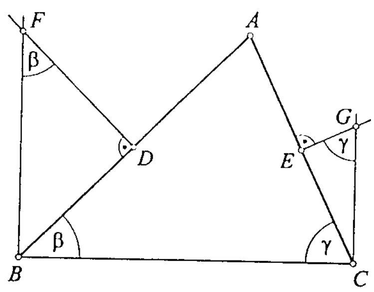
($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

Rješenja za III. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Označimo kutove trokuta ABC s α, β, γ. Tada je

$$|BF| = \frac{|AB|}{2\sin\beta}, \qquad |CG| = \frac{|AC|}{2\sin\gamma}$$

$$|BF|\cdot|CG| = \frac{1}{4}\cdot\frac{|AB|}{\sin\gamma}\cdot\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{1}{4}\left(\frac{|BC|}{\sin\alpha}\right)^2.$$



Dobiveni rezultat ne ovisi o položaju točke A.

2. Neka su ti brojevi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, prva znamenka a, te suma S. Iz $1000a \le x_i < 1000(a+1)$, slijedi $x_i + 4000a \le S < x_i + 4000(a+1)$, te

$$1 + \frac{4000a}{x_i} \le \frac{S}{x_i} < 1 + \frac{4000(a+1)}{x_i}.$$

Koristeći gornje ocjene za x_i dobivamo

$$1 + \frac{4a}{a+1} < \frac{S}{x_i} < 5 + \frac{4}{a}.$$

Ako je $a \ge 2$, onda odavde dobivamo $\frac{11}{3} < \frac{S}{x_i} < 7$, pa ovaj slučaj otpada jer trebamo četiri različite cjelobrojne vrijednosti za $\frac{S}{x_i}$.

Dakle, $a = 1$ i $3 < \frac{S}{x_i} < 9$. Stoga cjelobrojne vrijednosti $\frac{S}{x_i}$ mogu biti 4, 5, 6, 7 i 8, no 4 i 8 se ne mogu istovremeno pojaviti (jer je omjer x_i-ova manji od 2). Preostaju dvije mogućnosti: četiri cjelobrojne vrijednosti izraza $\frac{S}{x_i}$ su 5, 6, 7, 8 ili 4, 5, 6, 7.

U prvom slučaju je $S = 840k$, dok su x_i-ovi jednaki $168k$, $140k$, $120k$, $105k$, $307k$, pa ovaj slučaj otpada zbog $\frac{307k}{105k} > 2$.

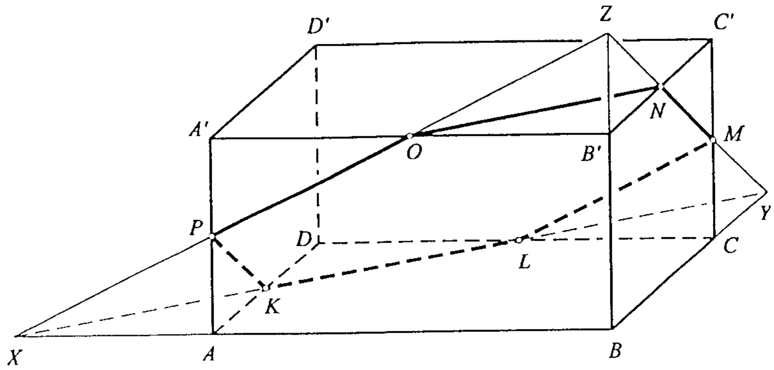
U drugom slučaju je $S = 420k$, dok su x_i-ovi jednaki $105k$, $84k$, $70k$, $60k$, $101k$. Sada iz $105k < 2000$ i $60k \ge 1000$ slijedi $17 \le k \le 19$. Dakle imamo tri petorke:

1020, 1190, 1428, 1717, 1785;

1080, 1260, 1512, 1818, 1890;

1140, 1330, 1596, 1919, 1995.

3. *Prvo rješenje.* Neka ravnina siječe pravce AB, BC i BB' redom u točkama X, Y i Z. Trokut XYZ je jednakostraničan (jer je šesterokut pravilan).



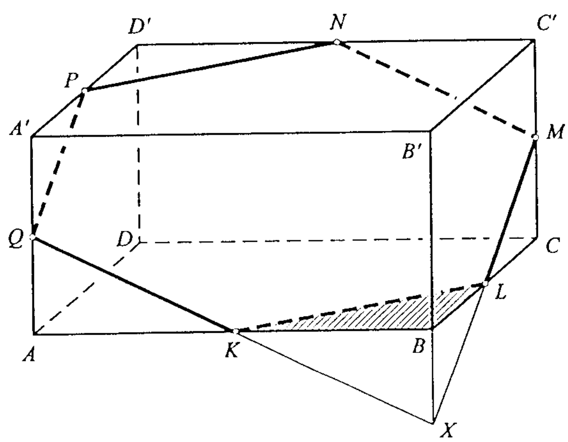
Pravokutni trokuti XBZ i YBZ su sukladni (pravokutni su, imaju zajedničku katetu i hipotenuze su im jednake duljine). Stoga je $|BX| = |BY|$ i analogno $|BX| = |BZ|$.

Piramide $XBYZ$ i $OB'NZ$ su slične i $|ON| = \frac{1}{3}|XY|$. Odavde slijedi

$$|B'Z| = \frac{1}{3}|BZ|, \quad |BB'| = \frac{2}{3}|BZ|.$$

Slično se dobije i $|AB| = \frac{2}{3}|XB|$ i $|CB| = \frac{2}{3}|YB|$. Konačno slijedi $|AB| = |BC| = |BB'|$, tj. $ABCDA'B'C'D'$ je kocka.

Drugo rješenje. Neka ravnina šesterokuta (uz oznake kao na slici) siječe pravac BB' u točki X.



Kako je šesterokut pravilan, trokut KLX je jednakostraničan. Stoga su pravokutni trokuti KBX i LBX sukladni (zajednička kateta $\overline{BX}$, sukladne hipotenuze) pa je $|KB| = |LB|$. Dakle trokut KBL je jednakokračan i pravokutan. Analogno, trokuti LCM, $MC'N$, $ND'P$, $PA'Q$ i QAK su jednakokračni pravokutni, a svi oni imaju jednake hipotenuze, pa su sukladni. Dakle, K, L, M, N, P i Q su polovišta sukladnih bridova pa je promatrani kvadar kocka.

4. Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
\lfloor \log_m n \rfloor = k \qquad &\Leftrightarrow \qquad k \le \log_m n < k+1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} < \log_n m \le \frac{1}{k} \\
&\Leftrightarrow \quad n^{\frac{1}{k+1}} < m \le n^{\frac{1}{k}}.
\end{aligned}$$

Za $m \in \{2,3,...,n\}$ izraz $\lfloor \log_m n \rfloor$ poprima vrijednosti od 1 do $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Prema tome,

$$\sum_{m=2}^{n} \lfloor \log_m n \rfloor = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} k(\lfloor n^{\frac{1}{k}} \rfloor - \lfloor n^{\frac{1}{k+1}} \rfloor),$$

no kako je za $k > \log_2 n$, $\lfloor n^{\frac{1}{k}} \rfloor = \lfloor n^{\frac{1}{k+1}} \rfloor = 1$, slijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{m=2}^{n} \lfloor \log_m n \rfloor &= \sum_{k=1}^{n} k(\lfloor n^{\frac{1}{k}} \rfloor - \lfloor n^{\frac{1}{k+1}} \rfloor) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \lfloor n^{\frac{1}{k}} \rfloor + \lfloor n^{1} \rfloor - n \lfloor n^{\frac{1}{n+1}} \rfloor \\
&= \sum_{k=2}^{n} \lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor.
\end{aligned}$$

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Mali Lošinj, 10. – 13. svibnja 2000. godine

IV. razred

1. Dana je točka T_0 na paraboli $\mathcal{P}$ s jednadžbom $y^2 = 2px$ i točka T_0' takva da je polovište dužine $\overline{T_0T_0'}$ na osi parabole $\mathcal{P}$. Za varijabilnu točku T na $\mathcal{P}$, različitu od T_0 i njoj simetrične točke s obzirom na os parabole, okomica iz točke T_0' na pravac T_0T siječe paralelu s osi parabole kroz točku T u točki T'. Što opisuje točka T'?

2. Krakovi jednakokračnog trokuta ABC diraju kružnicu čije se središte nalazi na osnovici $\overline{BC}$ tog trokuta. Točke P i Q nalaze se na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom. Dokažite da je

$$|PB| \cdot |CQ| = \left(\frac{1}{2}|BC|\right)^2$$

ako i samo ako je PQ tangenta promatrane kružnice.

3. Na kružnici je zapisano $n \geq 3$ prirodnih brojeva tako da svaki od njih dijeli zbroj dva njemu susjedna broja. Označimo

$$S_n = \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_3}{a_2} + \ldots + \frac{a_{n-2} + a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n}.$$

Odredite najveću i najmanju vrijednost od S_n.

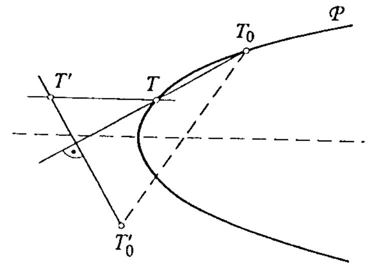
4. Neka je $S = \{k \in \mathbf{N} \ : \ a \in \mathbf{N},\ a^2 | k \Rightarrow a = 1\}$ i $n \in \mathbf{N}$. Dokažite da je

$$\sum_{k \in S} \left\lfloor \sqrt{\frac{n}{k}} \right\rfloor = n.$$

($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od x.)

Rješenja za IV. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

1. Neka točke T_0, T_0', T, T' imaju redom apscise x_0, x_0', x, x' i ordinate y_0, $-y_0$, y, y.



Pravci T_0T i $T_0'T'$ imaju koeficijente smjerova

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{2p(y-y_0)}{y^2-y_0^2}=\frac{2p}{y+y_0}$$

i

$$\frac{y+y_0}{x'-x_0'},$$

pa su ti pravci okomiti pod uvjetom $x'-x_0'=-2p$, tj.

$$x'=x_0'-2p=\text{konst.}$$

Zato točka T' leži na pravcu s jednadžbom $x=x_0'-2p$ koji je okomit na os parabole i udaljen za $2p$ od točke T_0'.
Pojedinu točku $T'(x',y')$ tog pravca dobivamo opisanim postupkom od (jedinstvene) točke parabole s ordinatom y'. Jedino točke s ordinatama y_0 i $-y_0$ nije moguće dobiti na opisani način.

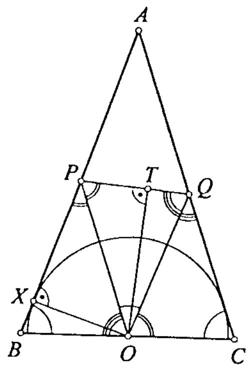
2. Neka je O polovište stranice $\overline{BC}$, odnosno središte kružnice.
Pretpostavimo najprije da je $|PB|\cdot|CQ|=|BO|^2=|CO|^2$. Tada je

$$\frac{|PB|}{|BO|}=\frac{|OC|}{|CQ|},$$

pa su trokuti PBO i OCQ slični jer je $\sphericalangle PBO=\sphericalangle OCQ$. Odavde slijedi

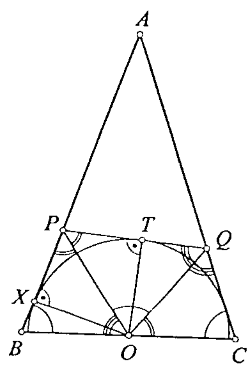
$$\frac{|PO|}{|OQ|}=\frac{|PB|}{|OC|}=\frac{|PB|}{|BO|},$$

odakle su trokuti POQ i PBO slični jer je $\sphericalangle POQ=180^\circ-\sphericalangle POB-\sphericalangle QOC=\sphericalangle PBO$. Neka su X i T nožišta okomica iz točke O na dužine $\overline{AB}$ i $\overline{PQ}$. Kako pravokutni trokuti XOP i TOP imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{OP}$ i jednake kutove, oni su sukladni. Odavde je $|OX|=|OT|$, što znači da je $\overline{OT}$ polumjer dane kružnice. Zato je PQ njezina tangenta.



Dokažimo obratnu tvrdnju. Kako je PQ tangenta na kružnicu, $\sphericalangle OPB = \sphericalangle OPQ$ i $\sphericalangle OQP = \sphericalangle CQO$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\sphericalangle BOP &= 180^\circ - \sphericalangle OPB - \sphericalangle PBO,\\
\sphericalangle QOC &= 180^\circ - \sphericalangle CQO - \sphericalangle OCQ,\\
\sphericalangle POQ &= 180^\circ - \sphericalangle BOP - \sphericalangle QOC\\
&= -180^\circ + 2\sphericalangle PBO + \sphericalangle OPB + \sphericalangle CQO\\
&= -180^\circ + 2\sphericalangle PBO + \sphericalangle QPO + \sphericalangle OQP\\
&= 2\sphericalangle PBO - \sphericalangle POQ,
\end{aligned}$$



odakle je $\sphericalangle POQ = \sphericalangle PBO$. Odavde slijedi $\triangle PBO \sim \triangle POQ \sim \triangle OCQ$. Iz sličnosti trokuta PBO i OCQ dobivamo

$$\frac{|PB|}{|BO|} = \frac{|OC|}{|CQ|},$$

a to je jednakost koju je trebalo dokazati.

3. Očito je

$$S_n = \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}\right) + \left(\frac{a_3}{a_2} + \frac{a_2}{a_3}\right) + \ldots + \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\right) \geq 2n,$$

pri čemu jednakost S_n vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Uzmimo sada da je $a_k = k$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Tada je

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n+2}{1} + \frac{1+3}{2} + \ldots + \frac{k+(k+2)}{k+1} + \ldots + \frac{n-2+n}{n-1} + \frac{n-1+1}{n} \\ &= n + 2 + 2(n-2) + 1 = 3n - 1. \end{aligned}$$

Pokažimo sada indukcijom da je ovo najveća moguća vrijednost, tj. $S_n \leq 3n - 1$.

Baza indukcije: $n = 3$. Možemo pretpostaviti da je $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Ako je $a_1 = a_2 = a_3$, onda je $S_3 = 6$. Inače je $\dfrac{a_1 + a_2}{a_3} < 2$, pa je $a_3 = a_1 + a_2$. Sada je $\dfrac{a_1 + a_3}{a_2} = \dfrac{2a_1 + a_2}{a_2} = \dfrac{2a_1}{a_2} + 1$, pa imamo dvije mogućnosti: ili je $a_1 = a_2$, pa je $S_3 = 3 + 3 + 1 = 7$, ili je $2a_1 = a_2$, pa je $S_3 = 5 + 2 + 1 = 8$.

Korak indukcije: Pretpostavimo da vrijedi $S_n \leq 3n - 1$. Neka su $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ brojevi s danim svojstvom, te neka je a_{n+1} najveći među njima. Imamo dvije mogućnosti:

1) Ako je $a_n = a_{n+1} = a_1$, tada je

$$S_{n+1} = S_n + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) + \left(\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}\right) - \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\right) = S_n + 2 \leq 3n + 1.$$

2) Ako je $a_{n+1} = a_n + a_1$ tada je

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \left(\frac{a_1 + a_n}{a_n} + \frac{a_n}{a_1 + a_n}\right) + \left(\frac{a_1}{a_1 + a_n} + \frac{a_1 + a_n}{a_1}\right) - \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}\right) \\ &= S_n + 1 + \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1 + a_n} + \frac{a_1}{a_1 + a_n} + 1 + \frac{a_n}{a_1} - \frac{a_1}{a_n} - \frac{a_n}{a_1} \\ &= S_n + 3 \leq 3n + 2 = 3(n+1) - 1. \end{aligned}$$

4. Najprije ćemo dokazati pomoćnu tvrdnju.

Lema 1. Neka su $n, k \in \mathbb{N}$. Tada je $\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k}}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{\frac{n-1}{k}}\right\rfloor = \begin{cases} 1 & \sqrt{\frac{n}{k}} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$.

Dokaz. Neka je $\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k}}\right\rfloor = a$. Tada je $a \leq \sqrt{\frac{n}{k}} < a + 1$,

$$a^2 - \frac{1}{k} \leq \frac{n-1}{k} < (a+1)^2 - \frac{1}{k},$$

$$a - 1 = \left\lfloor\sqrt{a^2 - \frac{1}{k}}\right\rfloor \leq \sqrt{\frac{n-1}{k}} \leq \left\lfloor\sqrt{(a+1)^2 - \frac{1}{k}}\right\rfloor = a.$$

Neka je $\sqrt{\frac{n}{k}} = a \in \mathrm{N}$. Tada je $n = ka^2$,

$$\left\lfloor\sqrt{\frac{n-1}{k}}\right\rfloor = \left\lfloor\sqrt{a^2 - \frac{1}{k}}\right\rfloor = a - 1,$$

pa je $\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k}}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{\frac{n-1}{k}}\right\rfloor = 1.$
Neka je

$$\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k}}\right\rfloor = a, \qquad \left\lfloor\sqrt{\frac{n-1}{k}}\right\rfloor = a - 1.$$

Tada je $\sqrt{\frac{n-1}{k}} < a \leq \sqrt{\frac{n}{k}}$, odakle slijedi $ka^2 \leq n < ka^2 + 1$. Kako je $a \in \mathrm{N}$ slijedi $n = ka^2$, tj. $\sqrt{\frac{n}{k}} \in \mathrm{N}$.

Stavimo $A_n = \sum_{k \in S} \left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k}}\right\rfloor$. Za $n = 1$ je $\left\lfloor\sqrt{\frac{1}{1}}\right\rfloor = 1$.
Dovoljno je pokazati da je $A_n - A_{n-1} = 1$, za $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
A_n - A_{n-1} &= \sum_{k \in S} \left(\left\lfloor\sqrt{\frac{n}{k}}\right\rfloor - \left\lfloor\sqrt{\frac{n-1}{k}}\right\rfloor \right) \\
&= \sum_{k \in S, \sqrt{\frac{n}{k}} \in \mathrm{N}} 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

jer za $n \in \mathrm{N}$ postoji jedinstveni $k \in S$ takav da je $\sqrt{\frac{n}{k}} \in \mathrm{N}$.