MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

3. ožujka 2000.

I. razred

1. Darko će 2000. godine navršiti onoliko godina koliki je zbroj znamenki godine njegova rođenja. Koje godine je Darko rođen?

2. Koliko različitih cjelobrojnih rješenja ima jednadžba

$$|x| + |y| < 100?$$

3. Ako je $a + b = 1$ i $ab \neq 0$, dokažite jednakost

$$\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2 + 3}.$$

4. Neka su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice pravokutnog trokuta. Dokažite nejednakost

$$R \geq r(1 + \sqrt{2}).$$

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Darko nema više od $1+9+9+9=28$ godina, pa je rođen u ovom stoljeću, recimo $\overline{19mn}$ godine. 5 bodova

Stoga će ove godine imati $2000-(1900+10m+n)$ godina, što mora biti jednako zbroju znamenki godine njegova rođenja. Dakle,

$$2000-(1900+10m+n)=1+9+m+n \quad \Rightarrow \quad 11m+2n=90.$$ 5 bodova

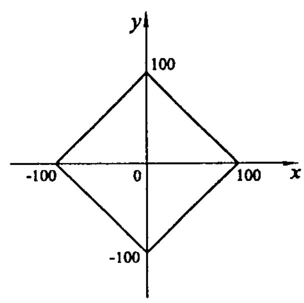
Kako je $11m=90-2n$, m mora biti paran. 5 bodova

Iz $0 \leq n = \dfrac{90-11m}{2} \leq 9$ slijedi $m \leq \dfrac{90}{11}$ tj. $m \leq 8$ (jer je m cijeli broj) i $m \geq \dfrac{90-2\cdot 9}{11} = \dfrac{72}{11}$ tj. $m \geq 7$. Kako m mora biti paran, slijedi $m=8$, a onda $n=1$.

Darko je rođen 1981. godine i ove godine navršava $1+9+8+1=19$ godina. 10 bodova

2. Treba odrediti koliko ima točaka (x,y) sa cjelobrojnim koordinatama unutar kvadrata (bez rubova) određenog pravcima

$$x+y=100, \quad x-y=100, \quad -x+y=100, \quad -x-y=100.$$



10 bodova

Na koordinatnim osima ima ih $4\cdot 99+1=397$. 5 bodova

U svakom kvadrantu (bez koordinatnih osi) ima ih

$$\begin{aligned} 98+97+\ldots+2+1 &= (98+1)+(97+2)+\ldots+(50+49) \\ &= 99\cdot\frac{98}{2} = 4851. \end{aligned}$$

5 bodova

Ukupno ih ima

$$397+4\cdot 4851 = 19\,801.$$ 5 bodova

3. *Prvo rješenje.* Stavimo $b = 1 - a$. 2 boda

Pokažimo da je lijeva strana jednaka desnoj:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{a}{(1-b)^3-1} - \frac{1-a}{a^3-1} \\
&= \frac{a}{1-3a+3a^2-a^3-1} - \frac{1-a}{(a-1)(a^2+a+1)} \\
&= \frac{1}{-a^2+3a-3} + \frac{1}{a^2+a+1} \\
&= \frac{-4a+2}{a^4-2a^3+a^2+3};
\end{aligned}$$

15 bodova

$$D = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3} = \frac{2(1-a-a)}{a^2(1-a)^2+3} = \frac{2-4a}{a^4-2a^3+a^2+3}.$$

8 bodova

Drugo rješenje. Zbog $a + b = 1$ vrijedi $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1$
i

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1.$ 5 bodova

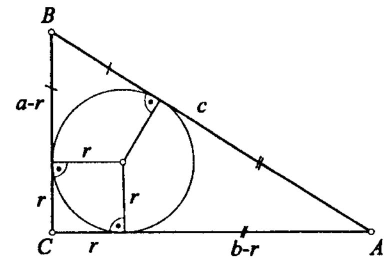
Sada je

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} &= \frac{a^4-a-b^4+b}{a^3b^3-a^3-b^3+1} \\
&= \frac{(b-a)[1-(a+b)(a^2+b^2)]}{a^3b^3-a^3-b^3+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)} \\
&= \frac{(b-a)[(a+b)^2-1\cdot(a^2+b^2)]}{a^3b^3+3a^2b+3ab^2} \\
&= \frac{(b-a)\cdot 2ab}{ab[a^2b^2+3(a+b)]} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. 20 bodova

4. *Prvo rješenje.*

U pravokutnom trokutu je $c = 2R$ i $(a - r) + (b - r) = c$, tj. $a + b = c + 2r$. 5 bodova



Zbog $(a - b)^2 \geq 0$ je $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, odnosno $\sqrt{2}c \geq a + b$. 5 bodova

Uvrstimo li u posljednju nejednakost, jednakost $a + b = c + 2r$, imamo

$$c + 2r \leq \sqrt{2}c, \quad \text{odnosno} \quad 2R + 2r \leq 2\sqrt{2}R.$$ 10 bodova

Odavde je $(\sqrt{2} - 1)R \geq r$ tj. $R \geq (1 + \sqrt{2})r$. 5 bodova

Drugo rješenje.

U pravokutnom trokutu vrijedi:

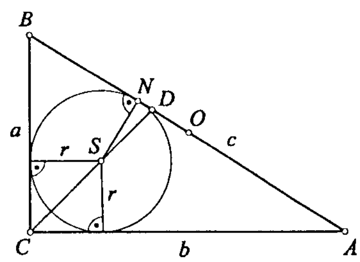
$$c = 2R, \quad (a-r)+(b-r)=c, \quad \text{tj.} \quad a+b-c=2r. \qquad \text{5 bodova}$$

Nejednakost $R \geq (1+\sqrt{2})r$ je ekvivalentna sa sljedećim nizom nejednakosti:

$$\begin{aligned}
2R &\geq 2r(1+\sqrt{2}),\\
c &\geq (1+\sqrt{2})(a+b-c),\\
(2+\sqrt{2})c &\geq (1+\sqrt{2})(a+b), \quad /^2\\
(4+4\sqrt{2}+2)c^2 &\geq (1+2\sqrt{2}+2)(a+b)^2,\\
2c^2 &\geq (a+b)^2,\\
2(a^2+b^2) &\geq (a+b)^2,\\
a^2+b^2 &\geq 2ab,\\
(a-b)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Kako je posljednja nejednakost istinita, vrijedi i polazna nejednakost. 15 bodova

Treće rješenje.



Ako je $a = b$, trokut je jednakokračan, i lako se pokaže da vrijedi čak jednakost. 5 bodova

Uzmimo $a < b$. Neka je S središte upisane kružnice, O središte opisane kružnice, N diralište upisane kružnice i hipotenuze i $D = CS \cap AB$, točka u kojoj simetrala pravog kuta siječe hipotenuzu.

Vrijedi:

$$r(\sqrt{2}+1) = r\sqrt{2}+r = |CS|+|SN| \leq |CS|+|SD| = |CD| \leq |CO| = R.$$

20 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

3. ožujka 2000.

II. razred

1. Za realan broj $a \geq 1$ riješite jednadžbu

$$z + a|z+1| + i = 0, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Diskusija!

2. Neka je $a+b+c > 0$ i neka jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ nema realnih rješenja. Dokažite da je $c > 0$.

3. Konstruirajte trapez $ABCD$, ako je zadan zbroj duljina osnovica, $|AB| + |CD|$, duljine dijagonala $|AC|$ i $|BD|$ i kut pri vrhu A.

4. Dokažite da postoji barem 2000 trojki prirodnih brojeva (a,b,c) takvih da je $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Uvrstimo $z = x + iy$:

$$x + iy + a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + i = 0,$$

i odavde

$$y + 1 = 0, \quad x + a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 0.$$

Slijedi, $y = -1$, $(a^2 - 1)x^2 + 2a^2x + 2a^2 = 0$.
Za $a \neq 1$ je

$$x_{1,2} = \frac{-a^2 \pm a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1}.$$ 15 bodova

Zbog $x_{1,2} \in \mathbf{R}$, mora biti $1 \leq a \leq \sqrt{2}$ i tada je
$z_{1,2} = \dfrac{-a^2 \pm a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1} - i$. U ovom slučaju postoje dva rješenja. 5 bodova

Za $a = 1$ je $2x + 2 = 0$ tj. $x = -1$, pa je $z = -1 - i$.
Dakle, za $a = 1$ postoji samo jedno rješenje $z = -1 - i$. 5 bodova

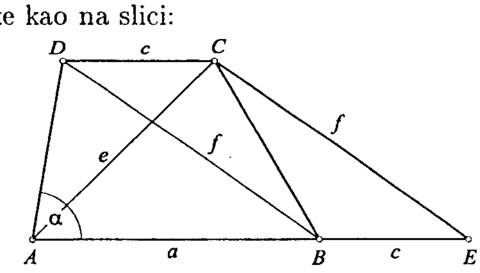
2. *Prvo rješenje.*
Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tada je $f(1) = a + b + c > 0$. 10 bodova
Kako je $f(x) \neq 0$ (jer jednadžba nema realnih rješenja), slijedi $f(x) > 0$ za svaki realan broj x. 10 bodova
Zato je $f(0) = c > 0$. 5 bodova

Drugo rješenje. Pretpostavimo da je $c < 0$. Uz $a \geq 0$ jednadžba bi imala realna rješenja (jer je $b^2 - 4ac \geq 0$). 10 bodova
Uzmimo sada, $a < 0$. Iz $a < 0$, $c < 0$, $b^2 - 4ac < 0$, $a + b + c > 0$, slijedi $b > -a - c$, $b^2 < 4ac$ i

$$b^2 > (a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac \geq 4ac,$$

što je kontradikcija. 15 bodova

3. Uvedimo oznake kao na slici:



Ako točkom C povučemo paralelu s dijagonalom $\overline{DB}$, ona siječe pravac kroz A i B u točki E. Četverokut $BECD$ je paralelogram pa je $|CE| = f$ i $|AE| = a + c$. 5 bodova

Dakle, najprije konstruiramo trokut AEC iz zadanih duljina e, f, $a+c$. 5 bodova

Točka D je presjek paralele kroz točku C s $\overline{AE}$ i drugog kraka kuta α pri vrhu A. 5 bodova

Konačno, paralela kroz točku D sa $\overline{CE}$ siječe $\overline{AE}$ u točki B. 5 bodova

Diskusija. Rješenje postoji ako i samo ako je $e+f>a+c$, $e+(a+c)>f$ i $f+(a+c)>e$. 5 bodova

4. *Prvo rješenje.* Označimo li $\frac{a}{c}=x$, $\frac{b}{c}=y$ dana jednadžba je ekvivalentna s

$$x^{15}+y^{15}=c.$$ 10 bodova

Odavde imamo ideju kako generirati trojku (a,b,c) s traženim svojstvom:

$$\begin{aligned} c &= x^{15}+y^{15} \\ a &= x\cdot c = x(x^{15}+y^{15}) \\ b &= y\cdot c = y(x^{15}+y^{15}). \end{aligned}$$

10 bodova

Kako za x i y možemo uzeti proizvoljne prirodne brojeve, takvih trojki ima beskonačno mnogo (pa onda i više od 2000). 5 bodova

Drugo rješenje. Uzmimo da je $a=b$. Tada je

$$2a^{15}=c^{16}.$$

Uz $a=\gamma c$ je

$$2\gamma^{15}c^{15}=c^{16}, \quad \text{tj.} \quad c=2\gamma^{15}.$$

Dakle, za prizvoljno $\gamma\in\mathbf{N}$, $(2\gamma^{16},2\gamma^{16},2\gamma^{15})$ je trojka s traženim svojstvom. 25 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

3. ožujka 2000.

III. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\log_{\sin x} \cos x - 2 \log_{\cos x} \sin x + 1 = 0.$$

2. Za koje trokute vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = 0,$$

ako su α, β i γ, kutovi trokuta?

3. Stranice trokuta duljina $a = 14$, $b = 13$ i $c = 15$, tangiraju sferu polumjera $R = 5$. Odredite udaljenost središta sfere od ravnine trokuta.

4. Dana je funkcija $f(x) = \dfrac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$, gdje je a pozitivan realan broj. Odredite

$$S = f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2}{2001}\right) + \ldots + f\left(\frac{2000}{2001}\right).$$

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Stavljajući

$$y = \log_{\sin x} \cos x = \frac{\log \cos x}{\log \sin x},$$ 5 bodova

jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$y - \frac{2}{y} + 1 = 0 \quad \text{tj.} \quad y^2 + y - 2 = 0,$$

čija rješenja su $y_1 = 1$ i $y_2 = -2$. 10 bodova

U prvom slučaju je $\log \cos x = \log \sin x$ tj. $\cos x = \sin x \geq 0$, odakle je $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. 5 bodova

U drugom slučaju je $\log \cos x = -2 \log \sin x$ tj. $\cos x = \frac{1}{\sin^2 x}$. Odavde dobivamo $\sin^2 x \cos x = 1$ tj. $\frac{1}{2} \sin 2x \cos x = 1$, pa u drugom slučaju ne postoji nijedno rješenje. 5 bodova

2. Neka je $\alpha - \beta = x$ i $\beta - \gamma = y$. Tada je $\gamma - \alpha = -[(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)] = -(x + y)$. 5 bodova

Odavde dobivamo:

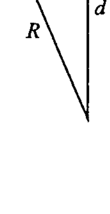
$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \operatorname{tg}(x+y) &= 0 \\
\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} &= 0 \\
-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \cdot \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} &= 0 \\
-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg}(x+y) &= 0 \quad \text{tj.} \\
\operatorname{tg}(\alpha - \beta) \operatorname{tg}(\beta - \gamma) \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) &= 0.
\end{aligned}$$

15 bodova

Odavde se dobije $\alpha - \beta = 0$ ili $\beta - \gamma = 0$ ili $\gamma - \alpha = 0$ tj. trokut je jednakokračan. 5 bodova

Napomena. Zadatak se može riješiti i bez uvođenja varijabli x i y , samo korištenjem jednakosti $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

3. Presjek ravnine trokuta i sfere je upisana kružnica trokuta. 5 bodova



3. razred

Njezin polumjer je

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = 4,$$

gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. 10 bodova

Udaljenost ravnine trokuta od središta sfere je

$$d = \sqrt{R^2 - r^2} = 3.$$ 10 bodova

4. Grupirajmo sumande na ovaj način

$$\begin{aligned} S &= \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(\frac{2000}{2001}\right)\right] + \ldots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(\frac{1001}{2001}\right)\right] \\ &= \left[f\left(\frac{1}{2001}\right) + f\left(1 - \frac{1}{2001}\right)\right] + \ldots + \left[f\left(\frac{1000}{2001}\right) + f\left(1 - \frac{1000}{2001}\right)\right]. \end{aligned}$$

10 bodova

Budući da je

$$\begin{aligned} f(x) + f(1-x) &= \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}} + \frac{a^{1-x}}{a^{1-x} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{a + a^x\sqrt{a} + a + a^{1-x}\sqrt{a}}{a + a^x\sqrt{a} + a^{1-x}\sqrt{a} + a} = 1 \end{aligned}$$

10 bodova

tada je

$$S = 1000 \cdot 1 = 1000.$$ 5 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Općinsko-gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

3. ožujka 2000.

IV. razred

1. Nađite sve četveroznamenkaste brojeve koji su jednaki kvadratu nekog cijelog broja, a imaju svojstvo da su im znamenke desetica i tisućica jednake, dok im je znamenka stotica za 1 veća od znamenke jedinica.

2. Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, takve da je $a + b = 3c$, dokažite jednakost

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2.$$

3. U elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ (sa središtem u ishodištu), upisan je trokut ABC tako da je tangenta na elipsu u svakom njegovom vrhu paralelna s nasuprotnom stranicom trokuta. Kolika je površina tog trokuta ako je $C = (0, b)$?

4. Dokažite da je

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

neparan broj za svaki pozitivan cijeli broj n.

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Neka je traženi broj $M = N^2$, $32 \leq N \leq 99$. 5 bodova
Tada je

$$N^2 = 1000x + 100(y+1) + 10x + y = 101(10x+y) + 100,$$ 5 bodova

odakle je

$$10x + y = \frac{N^2 - 100}{101} = \frac{(N+10)(N-10)}{101}.$$ 5 bodova

Iz uvjeta da je barem jedan od brojeva $N+10$ i $N-10$ djeljiv sa 101, te uvjeta $32 \leq N \leq 99$, slijedi, $N = 91$, te je $M = 91^2 = 8281$. 10 bodova

2. *Prvo rješenje.* Po sinusovom poučku je $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$, pa iz danog uvjeta slijedi

$$\sin\alpha + \sin\beta = 3\sin\gamma,$$ 5 bodova

a odatle

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 3\sin(\alpha+\beta),\\
2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} &= 3\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\\
2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} &= \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2},\\
\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} &= \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},\\
\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},\\
\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} &= 2.
\end{aligned}$$

20 bodova

Drugo rješenje. Po sinusovom poučku je

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c},$$

odakle je

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{a+b} &= \frac{\sin\gamma}{c} \\ \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{3c} &= \frac{\sin\gamma}{c} \\ 3\sin\gamma &= \sin\alpha + \sin\beta. \end{aligned}$$

5 bodova

Izrazimo sve pomoću $a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $b = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.
Danu jednakost sada možemo sada zapisati u obliku

$$\begin{aligned} 3(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) &= \sin\alpha + \sin\beta \\ 3\left(\frac{2a}{1+a^2}\cdot\frac{1-b^2}{1+b^2} + \frac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\frac{2b}{1+b^2}\right) &= \frac{2a}{1+a^2} + \frac{2b}{1+b^2}. \end{aligned}$$

10 bodova

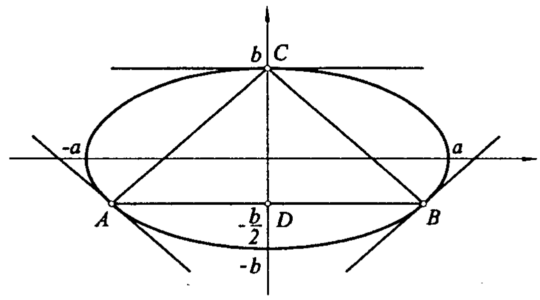
Sređivanjem dobivamo $4(a+b)(1-2ab) = 0$, no kako je $a+b>0$ (jer su $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ šiljasti kutevi), to je

$$1 - 2ab = 0, \quad \text{tj.} \quad ab = \frac{1}{2}, \quad \text{odnosno} \quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2.$$

10 bodova

3. Kako je $C = (0, b)$, $\overline{AB}$ mora biti paralelno s x-osi. Neka ona leži na pravcu $y = m$. Tada su koordinate točaka A i B

$$A\left(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - m^2}, m\right) \quad \text{i} \quad B\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - m^2}, m\right). \qquad \text{5 bodova}$$



Kako je tangenta kroz A paralelna s BC, moraju njihovi koeficijenti smjerova biti jednaki. Dakle,

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{b\sqrt{b^2 - m^2}}{am},$$

$$k = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{b - m}{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - m^2}}.$$

Odavde slijedi

$$b^2 - m^2 = -m(b - m) \quad \text{tj.} \quad m_1 = b,\ m_2 = -\frac{b}{2}. \qquad \text{10 bodova}$$

Drugo rješenje daje $A\left(-a\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ i $B\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{b}{2}\right)$,

pa je

$$P = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot \left(b + \frac{b}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}ab. \qquad \text{5 bodova}$$

4. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Neka je

$$x_n = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Za $n = 1$ i $n = 2$ je

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3+\sqrt{17}}{2} + \frac{3-\sqrt{17}}{2} = 3, \\ x_2 &= \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^2 = 13, \end{aligned}$$

tj. x_1 i x_2 su neparni brojevi. 5 bodova

Pretpostavimo da su

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1}, \\ x_n &= \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n, \end{aligned}$$

neparni brojevi. Dokažimo da je

$$x_{n+1} = \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1}$$

neparan. 5 bodova

Sada se dokaz može dovršiti na dva načina:

a)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left[2 + 3\cdot\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} + \left[2 + 3\cdot\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} \\ &= 3x_n + 2x_{n-1} \end{aligned}$$

10 bodova

Kako su x_{n-1} i x_n neparni brojevi, $2x_{n-1}$ je paran i $3x_n$ neparan, onda je x_{n+1} neparan. 5 bodova

općinsko 2000.
4. razred

b)

$$
\begin{aligned}
3x_n &= x_1 \cdot x_n \\
&= \left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right] \\
&= \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n+1} \\
&\quad + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} \\
&\quad + \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^{n-1} \\
&= x_{n+1} - 2x_{n-1} \\
\Rightarrow \quad x_{n+1} &= 3x_n + 2x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

15 bodova