MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko - gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
3. ožujka 2000. godine

7. razred

1. Izračunaj x iz razmjera

$$\frac{1.2 : 0.375 - 0.2}{6\frac{4}{25} : 15\frac{2}{5} + 0.8} = \frac{0.016 : 0.12 + 0.7}{x}.$$

2. Na jednom općinskom natjecanju iz matematike sudjelovalo je 240 učenika. Polovinu svih učenika čine $\frac{3}{5}$ svih djevojčica i $\frac{3}{7}$ svih dječaka. Koliko je na natjecanju sudjelovalo dječaka, a koliko djevojčica?

3. Razlika dvoznamenkastog broja i broja napisanog istim znamenkama, ali obrnutog redoslijeda je 45, a zbroj ta dva dvoznamenkasta broja jednak je umnošku dva ista prirodna broja. Koja dva dvoznamenkasta broja imaju to svojstvo?

4. Dan je pravokutnik $ABCD$, kome je točka S sjecište dijagonala. Na stranici $\overline{AD}$ odabrane su točke E i F, tako da je $|AE| = |EF| = FD|$. Odredi omjer površine peterokuta $EBSCF$ i površine pravokutnika $ABCD$.

5. U jednakokračnom trokutu ABC duljina kraka je dva puta veća od duljine osnovice, tj. $|AC| = |BC| = 2|AB|$. Neka je točka D polovište kraka $\overline{AC}$, a točka E polovište kraka $\overline{BC}$. Koliki su unutarnji kutovi trokuta ABC, ako dužine $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ zatvaraju kut od 76°?

2000 opć.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

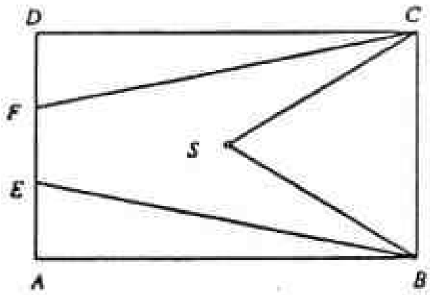
OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijednost brojnika prvog razlomka je 3. 3 boda
Vrijednost nazivnika prvog razlomka je 1.2. 3 boda
Vrijednost brojnika drugog razlomka je $\frac{5}{6}$. 2 boda
Tražena vrijednost je $x = \frac{1}{3}$. 2 boda
....UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x broj djevojčica koje su sudjelovale na natjecanju. Tada je $240 - x$ broj dječaka. Zato vrijedi jednadžba $\frac{3}{5}x + \frac{3}{7}(240 - x) = 120$. 3 boda
Rješenje ove jednadžbe je $x = 100$. 5 bodova
Na natjecanju je sudjelovalo 140 dječaka i 100 djevojčica. 2 boda
....UKUPNO 10 BODOVA

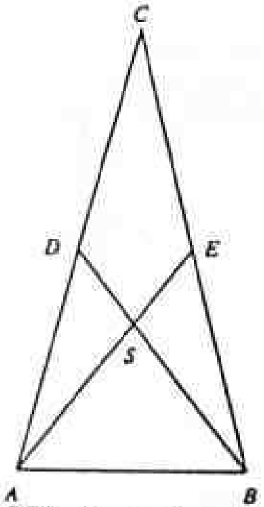
3. Neka traženi dvoznamenkasti brojevi imaju oblik $\overline{ab}$ i $\overline{ba}$ i neka je $\overline{ab} > \overline{ba}$. Tada vrijedi jednakost
$10a + b - (10b + a) = 45$, 2 boda
ili dalje redom $10a + b - 10b - a = 45$, $9a - 9b = 45$, $a - b = 5$, tj. $a = 5 + b$. 2 boda
Kako je $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$ i 11 je prost broj, slijedi da je $a + b = 11$. 2 boda
Dalje možemo na razne načine.
Ako u zadnjoj jednakosti zamijenimo a sa $b + 5$, dobivamo redom $b + 5 + b = 11$, tj. $b = 3$. 2 boda
Zato je $a = 8$. 1 bod
Traženi dvoznamenkasti brojevi su 83 i 38. 1 bod
....UKUPNO 10 BODOVA

4. Skica 2 boda



Neka je $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$ i neka je $|AE| = |EF| = |FD| = \frac{b}{3}$. U trokutu SBC visina na stranicu $\overline{BC}$ ima duljinu $\frac{a}{2}$, pa je $P(SBC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4}$. 2 boda
$P(BAE) = P(CDF) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{b}{3} = \frac{ab}{6}$. 2 boda
$P(EBSCF) = P(ABCD) - P(SBC) - P(BAE) - P(CDF) = ab - \frac{ab}{4} - \frac{ab}{6} - \frac{ab}{6} = \frac{5}{12}ab$. 3 boda
Omjer površina je $\frac{P(EBSCF)}{P(ABCD)} = \frac{5}{12}$ 1 bod
....UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica 1 bod



Neka je točka S presjek dužina $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$. Prvo valja pokazati da je $\triangle ABD \cong \triangle ABE$. Naime, iz uvjeta zadatka vrijedi jednakost $|AD| = |AB| = |BE|$, a $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABE$, jer su kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta jednaki. Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAE$. 2 boda

Sad valja odrediti koji je od dva susjedna kuta kut od $76°$. Pretpostavimo da je $\sphericalangle ASD = 76°$. Kako je $\sphericalangle ASD$ vanjski kut trokuta ABS, slijedi da je $\sphericalangle ABS + \sphericalangle BAS = 76°$, a zbog $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABS = \sphericalangle BAS$ vrijedi jednakost $2\sphericalangle ABS = 76°$, tj. $\sphericalangle ABS = 38°$. To znači da je i $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = 38°$, jer je $\triangle ABD$ jednakokračan, iz čega slijedi da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABE = 104°$ što ne može biti. 2 boda
Zato je nužno $\sphericalangle ASB = 76°$, iz čega slijedi da je $\sphericalangle ABS = \sphericalangle BAS = 52°$,
tj. $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAE = 52°$. 1 bod
Kako je $\sphericalangle ASB = 76°$ vanjski kut trokuta ASD, to nužno slijedi da je $\sphericalangle SAD + \sphericalangle ADS = 76°$, a zbog $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ADS = 52°$(jer je trokut ABD jednakokračan) dobivamo da je $\sphericalangle SAD + 52° = 76°$,
tj. $\sphericalangle SAD = 24°$. 2 boda
Dakle, $\sphericalangle BAD = 52° + 24° = 76°$. 1 bod
Unutarnji kutovi trokuta ABC su $76°, 76°, 28°$. 1 bod
.... UKUPNO 10 BODOVA