MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
3. ožujka 2000. godine

8. razred

1. Skrati razlomak
$$\frac{8ab-(a+2b)^2}{3a^2-12b^2}.$$

2. Konstruiraj kvadrat površine 14 cm^2.

3. Dana su dva okomita pravca a i c. Neka su pravci b i d simetrale kutova koje zatvaraju pravci a i c. Na pravcu a odaberemo točku A koja je od sjecišta S pravaca a i c udaljena 2. U točki A podignemo okomicu na pravac a i sa B označimo sjecište te okomice i pravca b. Neka je točka C presjek okomice na pravac b u točki B i pravca c, točka D presjek okomice na pravac c u točki C i pravca d, točka E presjek okomice na pravac d u točki D i pravca a, točka M presjek okomice na pravac a u točki E i pravca b, točka N presjek okomice na pravac b u točki M i pravca c. Kolika je površina mnogokuta $SABCDEMN$?

4. Iz mjesta A krenuo je autobus u mjesto B brzinom od 48 km na sat. Nakon pola sata vožnje autobusa, motorist koji se kretao isto iz mjesta A u mjesto B brzinom od 60 km na sat, sustigao je autobus i odmah nastavio vožnju u mjesto B. Došavši u mjesto B motorist se zadržao u mjestu 12 minuta i nastavio vožnju natrag u mjesto A, pa se tako susreo s autobusom na udaljenosti 12 km od mjesta B.

   Kolika je udaljenost mjesta A i mjesta B?

5. Dan je šiljasti kut α s vrhom u točki V. Unutar kuta α istaknuta je točka S koja je središte kružnice k. Kružnica k siječe jedan krak kuta α u točkama A i B, a drugi krak u točkama C i D, tako da su točke B i D bliže vrhu V nego točke A i C.

   Dokaži da je $\sphericalangle AVC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ASC - \sphericalangle BSD)$.

2000.
OPĆ.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Ako u brojniku zadanog razlomka kvadriramo, pa brojnik i nazivnik rastavimo na faktore dobivamo

$$\frac{8ab-(a+2b)^2}{3a^2-12b^2}=\frac{8ab-(a^2+4ab+4b^2)}{3a^2-12b^2}=$$

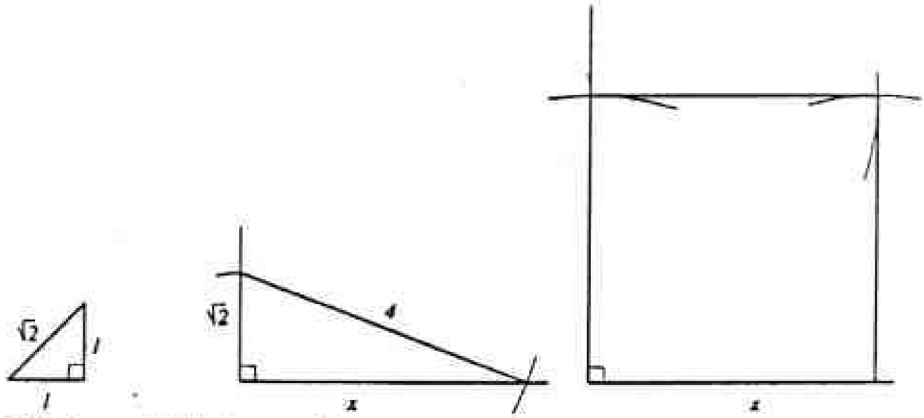
$$\frac{-a^2+4ab-4b^2}{3(a^2-4b^2)}=\frac{-(a^2-4ab+4b^2)}{3(a^2-4b^2)}=$$

$$\frac{-(a-2b)^2}{3(a-2b)(a+2b)}=\frac{-(a-2b)}{3(a+2b)}$$

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je x duljina stranice traženog kvadrata. Tada je $x^2=14$, tj. $x=\sqrt{14}$ cm. Dužinu duljine $\sqrt{14}$ cm možemo konstruirati na više načina.

1. način Kako je $x^2=16-2$, tj. $x^2=4^2-(\sqrt{2})^2$, slijedi da je x kateta pravokutnog trokuta s hipotenuzom duljine 4 cm i katetom $\sqrt{2}$ cm. Dakle, najprije valja konstruirati dužinu duljine $\sqrt{2}$ cm, a to je lako jer je to dijagonala kvadrata duljine stranice 1 cm. 8 bodova



2. način Primjenom Euklidova poučka.

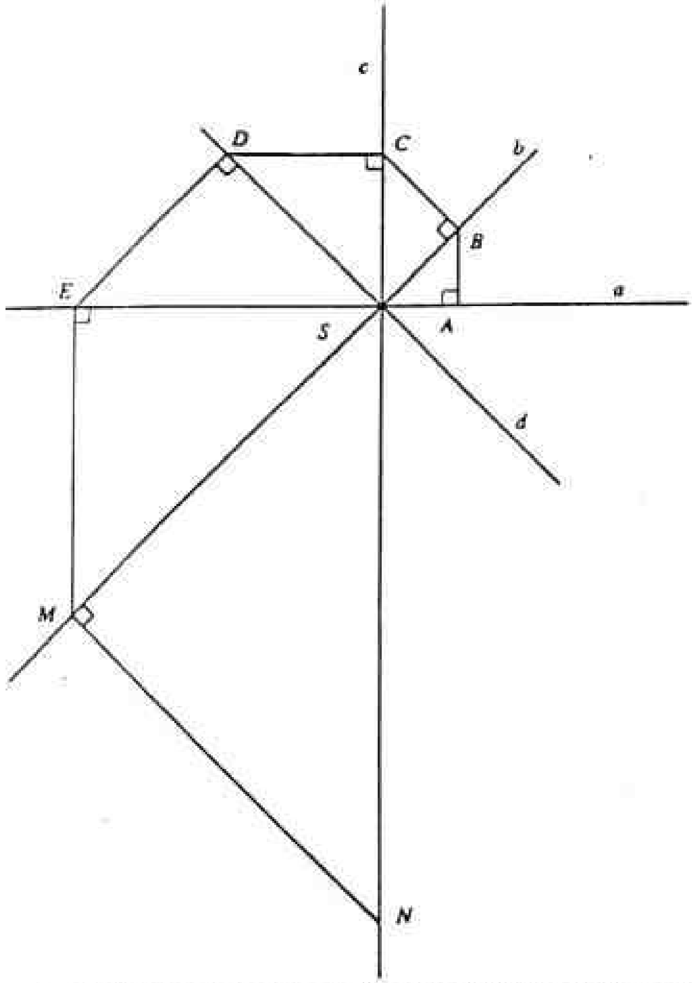
Naime, očito je $14=2\cdot7$. Nacrtamo kružnicu promjera $\overline{AB}$ ($|AB|=2+7=9$ cm). Neka je D točka na promjeru za koju vrijedi $|AD|=2$ cm. Okomica iz točke D siječe kružnicu u točki C, te prema Euklidovom poučku slijedi da je $|CD|^2=|AD|\cdot|BD|$, tj. $\overline{CD}$ je tražena stranica kvadrata, tj. $|CD|=\sqrt{14}$. 8 bodova

3. način Pomoću spirale kvadratnog korijena. 8 bodova

Konstrukcija kvadrata (uporabom dva trokuta i šestara) 2 boda

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Skica 1 bod



Kako su pravci b i d simetrale pravih kutova, slijedi da se pravci a i b, b i c, c i d, d i a sijeku pod 45° u točki S. To znači da je svaki od 6 pravokutnih trokuta na slici jednakokračan, tj. polovica kvadrata kojima su stranice redom $\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}, \overline{SE}, \overline{SM}$. 1 bod

Iz $|SA| = a = 2$ slijedi $P(SAB) = 2$. 1 bod

Kako je $|SB| = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ slijedi da je $P(SBC) = \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 4$. 1 bod

Zbog $|SC| = |SB|\sqrt{2} = 4$ dobivamo $P(SCD) = 8$. 1 bod

Na isti način slijedi da je $P(SDE) = 16$. 1 bod

Analogno, $P(SEM) = 32$. 1 bod

I konačno $P(SMN) = 64$. 1 bod

Tada je $P(SABCDEMN) = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 126$. 2 boda

. ... UKUPNO 10 BODOVA

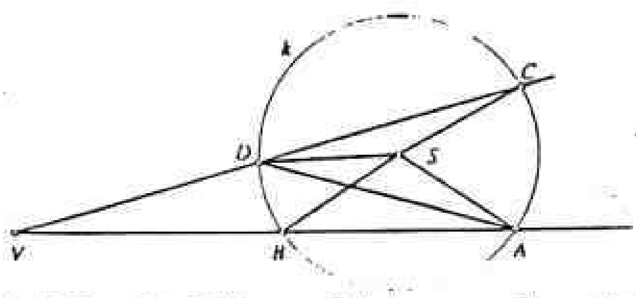
4. Neka je C mjesto u kojem je motorist sustigao autobus. Tada je $|AC| = 24$ km. Neka je D mjesto u kojem su se motorist i autobus susreli nakon povratka motorista iz mjesta B. Tada je $|BD| = 12$ km. Neka je $|CD| = x$ km. Put od C do D autobus je prešao za $\frac{x}{45}$ sati. Put od C do B i od B do D, tj. $(x + 12) + 12$ motorist je prešao za $\frac{x+24}{60} + \frac{1}{5}$ sati, a to je jednako vremenu autobusa od C do D. Zato vrijedi jednadžba $\frac{x+24}{60} + \frac{1}{5} = \frac{x}{45}$. 5 bodova

Rješenje je $x = 144$ km. 3 boda

Udaljenost mjesta A i B je $24 + 144 + 12 = 180$ km. 2 boda

. ... UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica 1 bod



Neka je $\sphericalangle AVC = \alpha$, $\sphericalangle ASC = \beta$, $\sphericalangle BSD = \gamma$. Primjenom poučka o obodnom i središnjem kutu u kružnici k vrijedi $\sphericalangle ASC = 2\sphericalangle ADC$, tj. $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}\beta$. 2 boda

Primjenom istog poučka vrijedi $\sphericalangle BSD = 2\sphericalangle BAD$, tj. $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\gamma$. 2 boda

Kako je $\sphericalangle ADC$ vanjski kut trokuta DVA, slijedi da je $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AVD + \sphericalangle VAD$, a zbog $\sphericalangle AVD = \sphericalangle AVC = \alpha$ i $\sphericalangle VAD = \sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\gamma$, vrijedi $\frac{\beta}{2} = \alpha + \frac{\gamma}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$, što je i trebalo dokazati. 5 bodova

. ... UKUPNO 10 BODOVA