VII.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
7. travnja 2000. godine

7. razred

1. Riješi nejednadžbu $\frac{3x-2}{x+1} < 0$ i grafički prikaži njezino rješenje.

2. Marko, Nikša, Šime i Tomislav četiri su učenika istog odjela 7. razreda. Jednog su dana na satu tjelesnog odgoja mjerili svoju težinu. Marko, Nikša i Šime imaju zajedno 138 kg. Marko, Nikša i Tomislav zajedno teže 146 kg. Marko, Šime i Tomislav imaju zajedno 131 kg, a Nikša, Šime i Tomislav zajedno teže 143 kg.
Koliko kilograma ima svaki od ova četiri učenika?

3. Ako dvoznamenkasti broj podijelimo zbrojem njegovih znamenaka, količnik je 6 i ostatak 2. Ako isti taj dvoznamenkasti broj podijelimo umnoškom njegovih znamenaka, količnik je 5 i ostatak 2.
Koji dvoznamenkasti broj ima to svojstvo?

4. Dan je pravokutnik $ABCD$ i točka E na stranici $\overline{BC}$. Dužina $\overline{DE}$ dijeli pravokutnik $ABCD$ na dva dijela, tako da se površine tih dijelova odnose kao $6:1$.
Koliki je omjer duljina dužina $\overline{CE}$ i $\overline{BE}$?

5. Dan je jednakokračni trokut ABC. Na kraku $\overline{AB}$ odabrana je točka M, a na kraku $\overline{AC}$ točka N, tako da pravac MN nije usporedan s pravcem BC. Pravac p koji prolazi polovištem dužine $\overline{MN}$ siječe krak $\overline{AB}$ u točki K, a krak $\overline{AC}$ u točki L. Neka su točke M_1 i N_1 nožišta okomica iz točaka M i N na pravac p. Ako je $|KL| = |M_1N_1|$, onda je pravac p usporedan s pravcem BC, tj. $p \parallel BC$. Dokaži!

7h 2000.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Vrijednost razlomka bit će negativna ako su brojnik i nazivnik različitog predznaka. 1 BOD
Zato razlikujemo dva slučaja:

1. $3x-2>0$ i $x+1<0$, tj. $x>\frac{2}{3}$ i $x<-1$. U ovom slučaju rješenje ne postoji, jer nema realnog broja koji je istovremeno veći od $\frac{2}{3}$ i manji od -1. 3 BODA
2. $3x-2<0$ i $x+1>0$, tj. $x<\frac{2}{3}$ i $x>-1$. Skup rješenja je presjek skupova rješenja obje dobivene nejednadžbe, tj. rješenja su svi realni brojevi x za koje je $-1<x<\frac{2}{3}$. 3 BODA

Dakle, zadani će razlomak biti negativan ako je $-1<x<\frac{2}{3}$. 1 BOD
Grafički prikaz rješenja: 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka Marko, Nikša, Šime i Tomislav imaju redom ove težine: a kg, b kg, c kg i d kg. Tada vrijede sljedeće jednakosti:
$a+b+c=138$, $a+b+d=146$, $a+c+d=131$, $b+c+d=143$. 2 BODA
Zbrojimo li ove četiri relacije, dobivamo $3(a+b+c+d)=558$, tj. $a+b+c+d=186$, a to je ukupna težina sva četiri učenika. 2 BODA
Dalje je lako! Naime, zamijenimo li u dobivenoj relaciji svaki od četiri zbroja težina po tri učenika njegovom vrijednošću, dobivamo redom: $138+d=186$, tj. $d=58$; $146+c=186$, tj. $c=40$; $131+b=186$, tj. $b=55$; $a+143=186$; tj. $a=43$. 4 BODA
Prema tome, Marko ima 43 kg, Nikša 55 kg, Šime 40 kg, a Tomislav teži 48 kg. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka traženi dvoznamenkasti broj ima oblik $\overline{ab}$. Prema uvjetima zadatka tada vrijede ove dvije jednakosti: $10a+b=6(a+b)+2$ i $10a+b=5ab+2$. Iz njih slijedi da je $6(a+b)+2=5ab+2$, tj. $6(a+b)=5ab$. 2 BODA
Budući da je desna strana zadnje jednakosti djeljiva s 5, nužno slijedi da je i njena lijeva strana djeljiva s 5. Jer je $a\in\{1,\ldots,9\}$ i $b\in\{0,1,\ldots,9\}$, to znači da je $a+b=5$ ili $a+b=10$ ili $a+b=15$. 2 BODA
Pogledajmo prvo slučaj $a+b=5$. U sljedećoj tablici nalaze se svi mogući parovi znamenaka (a,b) koji zadovoljavaju ovaj uvjet:

a	1	2	3	4	5
b	4	3	2	1	0

No, kako $a+b=5$ povlači da je $6\cdot5=5ab$, tj. $ab=6$, očito je da parovi $(1,4)$, $(4,1)$ i $(5,0)$ otpadaju. Isto tako, otpada i par $(2,3)$, jer $23\neq6\cdot5+2$. Dakle, jedina mogućnost je $(a,b)=(3,2)$. 3 BODA
Za $a+b=10$ svi mogući parovi znamenaka (a,b) su:

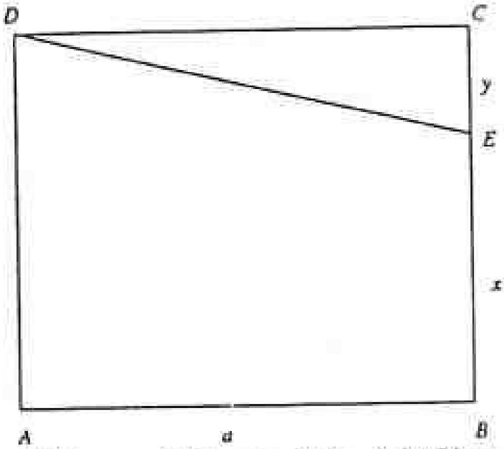
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	8	7	6	5	4	3	2	1	0

No, kako uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo $6\cdot10=5ab$, tj. $ab=12$, odmah otpadaju svi parovi te za ovaj slučaj nema rješenja. 1 BOD
Isto tako, ne može biti ni $a+b=15$, jer nijedan od mogućih parova znamenaka

a	6	7	8	9
b	9	8	7	6

ne zadovoljava uvjet $ab=18$, koji se dobije iz $6\cdot15=5ab$. 1 BOD
Prema tome, jedino rješenje zadatka je $(a,b)=(3,2)$, tj. traženi dvoznamenkasti broj je 32. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Skica 1 BOD



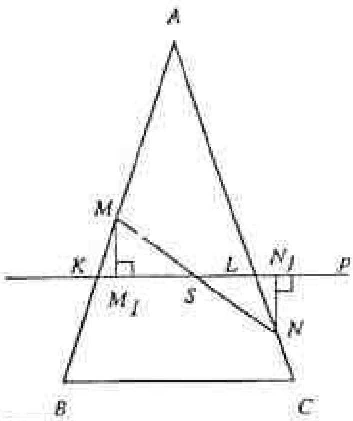
Neka je $|AB| = |DC| = a$, $|BE| = x$, $|CE| = y$. Tada je $|AD| = |BC| = x + y$. Očito je da su zadani dijelovi pravokutnika $ABCD$ pravokutni trokut ECD i pravokutni trapez $ABED$, kojem su $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ osnovice, a $\overline{AB}$ visina. Primjenom formula za površinu trokuta i trapeza dobivamo $P(ECD) = \frac{|EC|\cdot|DC|}{2} = \frac{y\cdot a}{2}$ i $P(ABED) = \frac{(|AD|+|BE|)\cdot|AB|}{2} = \frac{[(x+y)+x]\cdot a}{2} = \frac{(2x+y)\cdot a}{2}$. 3 BODA

Budući da je $P(ABED) : P(ECD) = 6 : 1$, uvrštavanjem dobivenih izraza za površine dobivamo redom ove jednakosti: $\frac{(2x+y)\cdot a}{2} = 6 \cdot \frac{y\cdot a}{2}$; $(2x+y)\cdot a = 6ya$; $2x + y = 6y$; $2x = 5y$; $\frac{y}{x} = \frac{2}{5}$. 4 BODA

Prema tome, $|EC| : |BE| = 2 : 5$, tj. točka E dijeli stranicu $\overline{BC}$ u omjeru $2 : 5$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica 1 BOD



Neka je točka S polovište dužine $\overline{MN}$, tj. $|MS| = |SN|$. Odmah imamo $\triangle MSM_1 \cong \triangle NSN_1$, jer je $|MS| = |NS|$, $\sphericalangle MSM_1 = \sphericalangle NSN_1$ (vršni kutovi) i $\sphericalangle SMM_1 = \sphericalangle SNN_1$ (dva šiljasta kuta uz presječnicu MN). Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $|MM_1| = |NN_1|$. 2 BODA

Sada treba dokazati da je $\triangle MKM_1 \cong \triangle NN_1L$. Zaista, $|MM_1| = |NN_1|$ i $\sphericalangle KM_1M = \sphericalangle NN_1L = 90^\circ$, a zbog uvjeta $|KL| = |M_1N_1|$ nužno slijedi i $|KM_1| = |LN_1|$. 3 BODA

Ova sukladnost povlači jednakost $\sphericalangle MKM_1 = \sphericalangle N_1LN$. Zbog $\sphericalangle N_1LN = \sphericalangle ALK$ (vršni kutovi) i $\sphericalangle MKM_1 = \sphericalangle AKL$ dalje je $\sphericalangle AKL = \sphericalangle ALK$, što znači da je $\triangle AKL$ jednakokračan te vrijedi $|AK| = |AL|$. 2 BODA

Sada konačno možemo dokazati usporednost pravacap i BC, što je izvedivo na razne načine. Očito je $\triangle AKL \sim \triangle ABC$, jer je $|AK| : |AL| = |AB| : |AC|$, a $\sphericalangle BAC$ je zajednički. Iz dokazane sličnosti slijedi da je $\sphericalangle AKL = \sphericalangle ABC$, što znači da je $p \parallel BC$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA