VIII.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
7. travnja 2000. godine

8. razred

1. Izračunaj vrijednost izraza

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).$$

2. Neki se bazen puni vodom kroz jednu cijev. Ako se dotok vode u bazen smanji za 20%, za koliko će se posto povećati vrijeme punjenja bazena?

3. Ako je veći od dva uzastopna prirodna broja kvadrat nekog prirodnog broja, tada je umnožak ta dva uzastopna prirodna broja djeljiv s 12. Dokaži!

4. U pravokutni trokut ABC, s pravim kutom kod vrha C, upisan je kvadrat $CDEF$, tako da vrh D leži na kateti $\overline{AC}$, vrh F na kateti $\overline{BC}$, a vrh E na hipotenuzi $\overline{AB}$, pri čemu je $|CE| = 4$ cm. Duljina visine iz vrha C na hipotenuzu je 3 cm.
   Kolika je površina pravokutnog trokuta ABC?

5. Dan je jednakokračni trapez $ABCD$ kojem su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ osnovice. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točki S tako da je $\measuredangle ASB = 60°$. Dokaži da su polovišta dužina $\overline{DS}$, $\overline{AS}$ i $\overline{BC}$ vrhovi jednakostraničnog trokuta.

ŽUP 2000.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

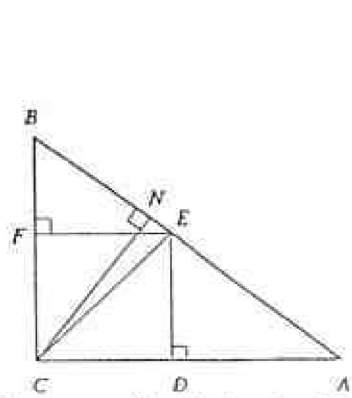
OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Lako se uoči da prvi i treći, te drugi i četvrti faktor predstavljaju razlike kvadrata. Zato zadani umnožak možemo pisati redom ovako:
$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$
$=\left[(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5\right]\cdot\left[(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-5\right]$ 4 BODA
$=(2+2\sqrt{6}+3-5)\cdot(2-2\sqrt{6}+3-5)$ 3 BODA
$=2\sqrt{6}\cdot(-2\sqrt{6})$ 1 BOD
$=-4\cdot 6$ 1 BOD
$=-24.$ 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je a broj litara vode koji isteče iz cijevi za 1 sat, a x vrijeme za koje se bazen napuni izraženo u satima. Tada volumen bazena iznosi ax litara. Ako se dotok vode smanji za 20%, iz cijevi će svakog sata istjecati $0.8a$ litara vode. Neka je y vrijeme za koje će bazen biti pun sa smanjenim dotokom vode, izraženo u satima. Volumen bazena tada je $0.8ay$. Zato vrijedi jednakost $ax=0.8ay$. 4 BODA
Dalje je redom $8y=10x$; $y=\frac{10}{8}x$; $y=\frac{5}{4}x$; $y=1.25x$; $y=x+0.25x$. 4 BODA
Sada je jasno da će se sa smanjenim dotokom vode vrijeme punjenja bazena povećati za $0.25x$, tj. za 25%. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

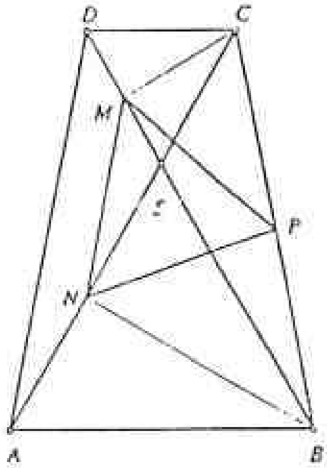
3. Neka su a i $a+1$ dva uzastopna prirodna broja, pri čemu je $a+1=n^2$. Tada je $a=n^2-1$, te je umnožak ta dva uzastopna prirodna broja jednak $a(a+1)=(n^2-1)\cdot n^2$. 1 BOD
Dalje je $a(a+1)=(n-1)(n+1)n^2$, odnosno $a(a+1)=(n-1)n(n+1)n$. 1 BOD
Kako su $n-1$, n, $n+1$ tri uzastopna prirodna broja, točno je jedan od njih djeljiv s 3. 2 BODA
Ako je $n-1$ paran broj, tada je i $n+1$ paran broj, a od dva uzastopna parna broja jedan je sigurno djeljiv s 4. 2 BODA
Ako je $n-1$ neparan broj, tada je n paran broj, a to znači da je umnožak $n\cdot n$, djeljiv s 4. 2 BODA
Dakle, umnožak $(n^2-1)\cdot n^2$, tj. umnožak $a(a+1)$, uvijek je djeljiv s 3, a bez obzira je li $n-1$ paran ili neparan, dani je umnožak također djeljiv i s 4.
Prema tome, $a(a+1)$ uvijek je djeljiv s $3\cdot 4$, tj. s 12. 2 BODA
.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Skica 1 BOD



Neka je $|BC|=a$, $|AC|=b$ i $|AB|=c$, a točka N neka je nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$. Tada je $|CN|=3$ cm. Primjenom formule za duljinu dijagonale kvadrata lako odredimo duljinu stranice kvadrata $x=|ED|=|EF|$. Imamo $|CE|=|ED|\cdot\sqrt{2}$, odnosno $|ED|=2\sqrt{2}$. 2 BODA
Primjenom formula za površinu pravokutnog trokuta slijedi jednakost $\frac{a\cdot b}{2}=\frac{c\cdot 3}{2}$, tj. $ab=3c$, odnosno $2ab=6c$. 2 BODA
Očito, $\overline{EF}$ je visina trokuta BCE, $\overline{ED}$ je visina trokuta AEC i vrijedi jednakost $P(BCE)+P(AEC)=P(ABC)$. Iz nje slijedi redom: $\frac{a\cdot x}{2}+\frac{b\cdot x}{2}=\frac{c\cdot 3}{2}$; $ax+bx=3c$; $x(a+b)=3c$; $2\sqrt{2}\cdot(a+b)=3c$. 2 BODA
Ako zadnju jednakost kvadriramo, dobivamo $8(a^2+b^2+2ab)=9c^2$, a zbog $a^2+b^2=c^2$ i $2ab=6c$ dalje redom vrijedi: $8(c^2+6c)=9c^2$; $8c^2+48c=9c^2$; $48c=c^2$; $c=48$. 2 BODA
Dakle, površina $\triangle ABC$ je $P(ABC)=\frac{48\cdot 3}{2}=72$, tj. $P(ABC)=72\ \mathrm{cm}^2$. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica 1 BOD



Neka je točka M polovište dužine $\overline{DS}$, točka N polovište dužine $\overline{AS}$, a točka P polovište kraka $\overline{BC}$.
Lako se pokaže da je $\triangle ABD \cong \triangle ABC$, jer je $|AD| = |BC|$, $|BD| = |AC|$, a $\overline{AB}$ je zajednička stranica.
Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CAB$, a zbog $\sphericalangle ASB = 60^\circ$ zaključujemo da je trokut ABS jednakostraničan. 1 BOD
Budući da je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD = 60^\circ$ (kutovi uz presječnicu), iz $\sphericalangle CSD = 60^\circ$ slijedi da je trokut CSD jednakostraničan. 1 BOD
Budući da u jednakostraničnom trokutu ABS vrijedi $|AN| = |SN|$, slijedi da je $\overline{BN}$ visina trokuta ABS, tj. $BN \perp AC$, pa zaključujemo da je trokut BNC pravokutan. 1 BOD
Istim zaključivanjem dokazujemo da je $CM \perp BD$, a to znači da je i trokut BMC pravokutan. 1 BOD
Kako je točka P polovište dužine $\overline{BC}$, a prema Talesovu poučku točke M i N leže na kružnici promjera $\overline{BC}$, slijedi da je $|PN| = |PM| = |PB| = |PC|$. 2 BODA
U $\triangle ASD$ dužina $\overline{MN}$ je srednjica, a to znači da je $|MN| = \frac{1}{2}|AD|$, a zbog $|AD| = |BC|$ slijedi da je $|MN| = \frac{1}{2}|BC|$, tj. $|MN| = |PB| = |PC|$. 2 BODA
Sad je jasno da vrijedi $|PN| = |PM| = |MN|$, a to znači da je $\triangle PMN$ jednakostraničan. 1 BOD
.... UKUPNO 10 BODOVA