ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Makarska, 9. – 12. svibnja 2001. godine

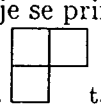
I. razred

1. Za koje cijele brojeve x je $2x^2 - x - 36$ kvadrat prostog broja?

2. Sjecište dijagonala kvadrata $ABCD$ je točka S, dok je točka P polovište stranice $\overline{AB}$. Neka je M sjecište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{PD}$, a N sjecište dužina $\overline{BD}$ i $\overline{PC}$. Četverokutu $PMSN$ upisana je kružnica. Dokažite da je njen polumjer jednak $|MP| - |MS|$.

3. Dokažite da za pozitivne realne brojeve a i b vrijedi nejednakost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

4. Za koje se prirodne brojeve n pravokutna ploča $9 \times n$ može prekriti pločicama oblika  tako da se one međusobno ne preklapaju?

Rješenja za I. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

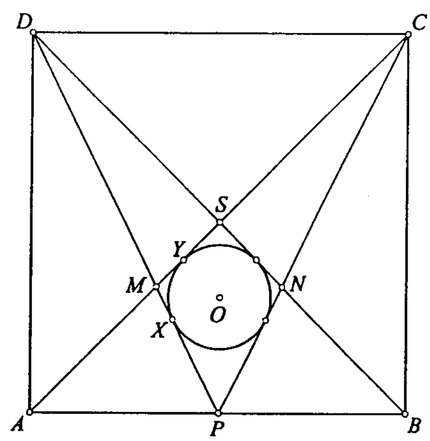
1. Neka je $2x^2-x-36=p^2$, gdje je p prost broj. Tada je $p^2=(x+4)(2x-9)=ab$, gdje je $a=x+4$, $b=2x-9$, pri čemu je $a,\ b\in \mathbb{Z}$ i $2a-b=17$.

Može nastupiti jedan od sljedećih šest slučajeva:

1°	$a=p^2,\ b=1$	$\Rightarrow$	$2p^2-1=17$	$\Rightarrow$	$p=3$	$\Rightarrow$	$x=a-4=p^2-4=5;$
2°	$a=p,\ b=p$	$\Rightarrow$	$2p-p=17$	$\Rightarrow$	$p=17$	$\Rightarrow$	$x=a-4=p-4=13;$
3°	$a=1,\ b=p^2$	$\Rightarrow$	$2-p^2=17$	$\Rightarrow$	$p^2=-15,$		što nije moguće;
4°	$a=-p^2,\ b=-1$	$\Rightarrow$	$-2p^2+1=17$	$\Rightarrow$	$p^2=-8,$		što nije moguće;
5°	$a=-p,\ b=-p$	$\Rightarrow$	$-2p+p=17$	$\Rightarrow$	$p=-17,$		što nije moguće;
6°	$a=-1,\ b=-p^2$	$\Rightarrow$	$-2+p^2=17$	$\Rightarrow$	$p^2=19,$		što nije moguće.

Dakle, traženi brojevi su $x=5$ i $x=13$.

2. *Prvo rješenje.* Neka je O središte kružnice, a X i Y redom točke u kojima kružnica dira stranice $\overline{MP}$ i $\overline{MS}$. Označimo polumjer kružnice s r.



Kako je $OY \perp MS$ i $\sphericalangle YSO = \sphericalangle ASP = 45^\circ$, (točka O se nalazi na simetrali $\sphericalangle MSN$, tj. na dužini $\overline{SP}$). Stoga je trokut SYO jednakokračan i pravokutan, pa je $|SY|=|YO|=r$.

Trokut OXP sličan je trokutu PAD, jer je $\sphericalangle OXP = \sphericalangle DAP = 90^\circ$ i $\sphericalangle OPX = \sphericalangle PDA$. Stoga je $|XP|:|XO| = |AD|:|AP| = 2$, pa je $|XP|=2r$.

Kako su X i Y dirališta tangenata povučenih iz točke M na kružnicu, vrijedi $|MX| = |MY|$. Konačno imamo

$$|MP|-|MS| = (|MX|+|XP|)-(|MY|+|YS|) = |XP|-|YS| = 2r-r=r,$$

te je tvrdnja dokazana.

Drugo rješenje. Neka je O središte i r polumjer kružnice. Dužine $\overline{DP}$ i $\overline{AS}$ su težišnice trokuta ABD, pa je točka M njegovo težište. Označimo duljinu stranice $\overline{AB}$ s a. Tada je

$$|AP| = \frac{1}{2}a, \qquad |DP| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$|AC| = a\sqrt{2}, \qquad |AS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Dalje je

$$|MP| = \frac{1}{3}|DP| = \frac{a\sqrt{5}}{6} \quad \text{i} \quad |MS| = \frac{1}{3}|AS| = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Stoga je

$$|MP| - |MS| = \frac{a(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{6}.$$

Odredimo polumjer kružnice. Površina četverokuta $PMSN$ je

$$\begin{aligned} P(PMSN) &= P(PMO) + P(MSO) + P(SNO) + P(NPO) \\ &= \frac{r \cdot |PM|}{2} + \frac{r \cdot |MS|}{2} + \frac{r \cdot |SN|}{2} + \frac{r \cdot |NP|}{2} \\ &= r \cdot (|PM| + |MS|) = r \cdot \frac{a}{6}(\sqrt{5}+\sqrt{2}) \qquad (*) \end{aligned}$$

(jer je $|PM| = |PN|$, $|SM| = |SN|$).
S druge strane, $PMSN$ je deltoid, pa mu je površina $\dfrac{|MN| \cdot |PS|}{2}$.
Kako su trokuti ABS i MNS slični, vrijedi

$$\frac{|MN|}{|AB|} = \frac{|SM|}{|SA|} = \frac{1}{3}, \quad \text{pa je} \quad |MN| = \frac{|AB|}{3} = \frac{a}{3}.$$

Imamo, $P(PMSN) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{3} \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{12}$.
Konačno iz $(*)$ je

$$r = \frac{P(PMSN)}{\frac{a}{6}(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{a(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{6},$$

što je zaista jednako $|MP| - |MS|$.

3. Kubiranjem dane nejednakosti dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\frac{a}{b} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \le 2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

odnosno, nakon sređivanja

$$3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right) \le 4 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Ova nejednakost je ekvivalentna polaznoj, pa je dovoljno nju dokazati.

Prvi način. Neka je $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Tada je x pozitivan realan broj, a nejednakost (1) postaje

$$3(x + x^{-1}) \leq 4 + x^3 + x^{-3},$$

što je ekvivalentno s

$$\begin{aligned} x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 &\geq 0 \\ (x-1)(x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 1) &\geq 0 \\ (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) &\geq 0, \end{aligned}$$

a posljednja nejednakost očito vrijedi za $x \geq 0$. Jednakost se postiže ako i samo ako je $x = 1$, tj. $a = b$.

Drugi način. Pokažimo da je

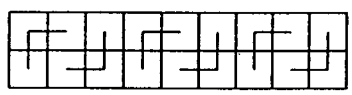
$$3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \leq 2 + \frac{a}{b} \tag{2}$$

(i na isti način $3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq 2 + \frac{b}{a}$, odakle zbrajanjem dobivamo traženu nejednakost). Na brojeve 1, 1, $\frac{a}{b}$ primijenimo A–G nejednakost:

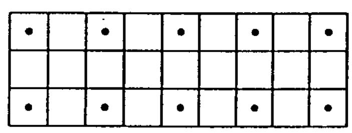
$$\sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot \frac{a}{b}} \leq \frac{1 + 1 + \frac{a}{b}}{3},$$

odakle odmah slijedi (2). Jednakost u A–G nejednakosti se postiže ako i samo ako su svi brojevi međusobno jednaki, tj. ako je $1 = 1 = \frac{a}{b}$, tj. ako je $a = b$.

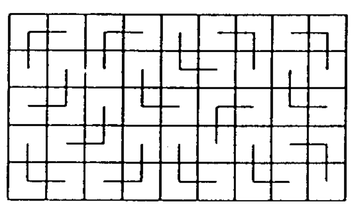
4. Danim pločicama mogu se pokriti ploče $9 \times 2k$, za $k \in \mathbb{N}$, što se vidi sa slike:



Ploču 9×3 nije moguće pokriti. Za svako polje označeno točkicom potrebna je po jedna pločica, tj. treba 10 pločica. No, 10 pločica pokriva 30 polja, a dana ploča ima samo 27 polja.



Ploču 9×5 je moguće pokriti, što se vidi sa slike:



Zato je moguće pokriti i svaku ploču $9 \times (2k + 1)$, $k \geq 3$, jer se ona može prikazati kao unija pravokutne ploča 9×5 i ploča 9×2.

Dakle, može se pokriti svaka ploča $9 \times n$ za $n \geq 2$ i $n \neq 3$.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Makarska, 9. – 12. svibnja 2001. godine

II. razred

1. Neka je z kompleksan broj različit od nule, koji zadovoljava jednakost $z^8 = \bar{z}$. Koje vrijednosti može poprimiti broj z^{2001}?

2. Kružnica sa središtem O dira stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC redom u točkama K, P i Q. Dužine $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ sijeku spojnicu $\overline{PQ}$ redom u točkama M i N. Dokažite da je
$$\frac{|QN|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|BC|} = \frac{|MP|}{|CA|}.$$

3. Neka je N prirodan broj. Dano je N trojki cijelih brojeva r_j, s_j, t_j, za $1 \leq j \leq N$, takvih da je barem jedan od njih neparan. Pokažite da postoje cijeli brojevi a, b, c takvi da je $ar_j + bs_j + ct_j$ neparan, za barem $\frac{4N}{7}$ različitih indeksa j.

4. Neka je P poligon u koordinatnom sustavu u ravnini čija je površina veća od 1. Dokažite da postoje dvije različite točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) poligona P takve da su $x_1 - x_2$ i $y_1 - y_2$ cijeli brojevi.

Rješenja za II. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

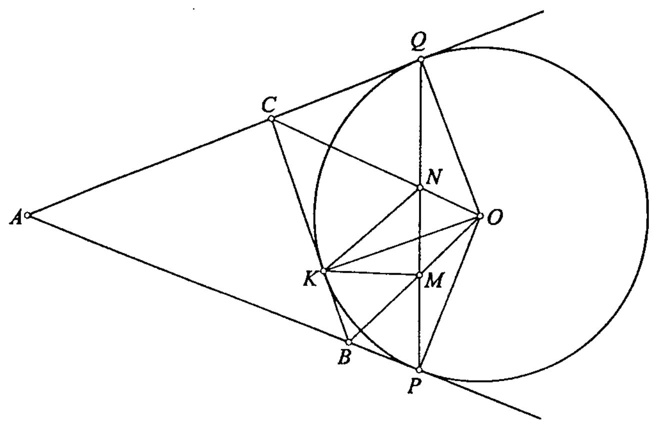
1. Iz $z^8 = \bar{z}$ slijedi $z^9 = z \cdot \bar{z} = |z|^2$, tj. $|z|^9 = |z|^2$. Odavde je, zbog $z \neq 0$, $|z| = 1$.

Kako je $z^9 = 1$ iz $z^{2001} = (z^9)^{222} \cdot z^3 = z^3$ i $(z^3)^3 = z^9 = 1$, uz supstituciju $w = z^3$, dobivamo jednadžbu

$$w^3 - 1 = 0, \text{ tj. } (w-1)(w^2+w+1) = 0.$$

Odavde je $w_1 = 1$ ili $w_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Dakle, $z^{2001} \in \{1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\}$.

2. Kako je BO simetrala kuta $\sphericalangle PBK$ i M točka na njoj, vrijedi $|PM| = |KM|$. Analogno je $|QN| = |KN|$. Stoga je dovoljno pokazati da je $\triangle ABC \sim \triangle KNM$.



Ako kuteve trokuta označimo s α, β i γ, u četverokutu $BKMP$ imamo

$$\sphericalangle PBK = 180° - \beta,$$
$$\sphericalangle BKM = \sphericalangle BPM = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

(jer je $\sphericalangle OPQ = \sphericalangle PAO = \frac{\alpha}{2}$). Zato je

$$\sphericalangle PMK = 360° - \sphericalangle PBK - 2\sphericalangle BKM = \alpha + \beta.$$

Odavde je

$$\sphericalangle KMN = 180° - \sphericalangle PMK = \gamma.$$

Analogno se pokazuje $\sphericalangle KNM = \beta$, pa slijedi $\triangle KNM \sim \triangle ABC$, što je i trebalo dokazati.

3. Promatrajmo svih 7 trojki (a, b, c), gdje su a, b, $c \in \{0, 1\}$ takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, tj. da barem jedan od brojeva a, b, c nije jednak nuli.

Kako za svaki j nisu svi r_j, s_j, t_j parni, tri od suma $ar_j + bs_j + ct_j$ su parne, a četiri neparne (lako se provjeri!), to znači da među svim sumama ima točno $4N$ neparnih suma. Po Dirichletovom principu postoji trojka (a, b, c), za koju je barem $\frac{4N}{7}$ suma neparno.

4. Pretpostavimo da ne postoje nikoje dvije točke $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ takve da je $x_1 - y_1 \in \mathbf{Z}$ i $x_2 - y_2 \in \mathbf{Z}$.

Neka je K jedinični kvadrat, tj. K$= [0, 1) \times [0, 1)$.

Definirajmo preslikavanje $f : P \longrightarrow K$ na ovaj način:

$$f((x, y)) = (x - \lfloor x \rfloor, y - \lfloor y \rfloor).$$

Pokažimo da je preslikavanje f je injektivno. Neka je $f((x_1, y_1)) = f((x_2, y_2))$. Tada je $x_1 - \lfloor x_1 \rfloor = x_2 - \lfloor x_2 \rfloor$ i $y_1 - \lfloor y_1 \rfloor = y_2 - \lfloor y_2 \rfloor$. To znači da je $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2 \in \mathbf{Z}$, što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Ovo preslikavanje translatira dijelove poligona P na jedinični kvadrat, pa je površina njegove slike jednaka površini polaznog poligona. No tada bi bilo $f(P) \subseteq K$, što je nemoguće jer je površina od P veća od površine jediničnog kvadrata K.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Makarska, 9. - 12. svibnja 2001. godine

III. razred

1. U ravnini su dane dvije različite točke O i P. Odaberimo paralelogram $ABCD$ kojem je točka O središte. Označimo s M i N redom polovišta dužina $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$. Točka Q je presjek dužina $\overline{MC}$ i $\overline{ND}$. Dokažite da točke O, Q i P leže na istom pravcu i da točka Q ne ovisi o izboru paralelograma $ABCD$.

2. Dan je trokut ABC takav da je $|AC| \neq |BC|$. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$, $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\varphi = \sphericalangle ACM$, $\psi = \sphericalangle BCM$. Dokažite da je
$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

3. Na ploči su napisani brojevi $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2001}$. Učenik odabire dva broja s ploče, recimo x i y, te izračuna broj $x+y+xy$, rezultat zapiše na ploču, a x i y obriše. Odredite broj koji će ostati na ploči nakon što ovaj postupak obavi 2000 puta.

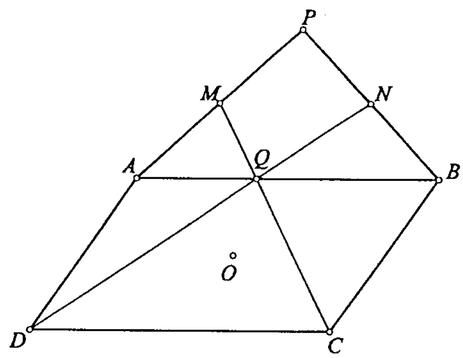
4. Skup S sadrži 100 prirodnih brojeva, od kojih je svaki manji od 200. Pokažite da postoji neprazan podskup T od S takav da je produkt brojeva iz T potpuni kvadrat.

Rješenja za III. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Zbog paralelnosti pravaca MN, AB i CD trokuti MQN i CDQ su slični. Kako je $\overline{MN}$ srednjica trokuta ABP, tada je $|MN| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|CD|$. Odavde slijedi:

$$|QN| = \frac{1}{2}|DQ|, \qquad |QM| = \frac{1}{2}|CQ|,$$

$$|DQ| = \frac{2}{3}|DN|, \qquad |CQ| = \frac{2}{3}|CM|.$$



Nadalje,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DN} &= 2\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BP}\\ &= 2\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}\\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

Odavde dobivamo,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DQ}\\ &= \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DN}\\ &= -\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OP}\right) \qquad \Longrightarrow\\ \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OP}.\end{aligned}$$

Odavde slijedi da točke O, Q i P leže na istom pravcu i da položaj točke Q ovisi samo o točkama O i P.

2. Uz oznaku $m = |CM|$, primjenom kosinusovog poučka na trokute ACM i BCM dobivamo,

$$b^2 + m^2 - 2bm\cos\varphi = \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + m^2 - 2am\cos\psi, \tag{1}$$

$$b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - bc\cos\alpha = m^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - ac\cos\beta \tag{2}$$

Iz (1) i (2) dobivamo

$$\begin{aligned} 2m(a\cos\psi - b\cos\varphi) &= a^2 - b^2 \\ c(a\cos\beta - b\cos\alpha) &= a^2 - b^2, \end{aligned}$$

odakle dobivamo

$$a\cos\psi - b\cos\varphi = \frac{c}{2m}(a\cos\beta - b\cos\alpha). \tag{3}$$

Iz poučka o sinusima na trokut ACM slijedi

$$\frac{c}{2m} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) je

$$\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{a\cos\psi - b\cos\varphi} &= \frac{\sin\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha}, \\ \frac{\sin\varphi}{\frac{a}{b}\cos\psi - \cos\varphi} &= \frac{\sin\alpha}{\frac{a}{b}\cos\beta - \cos\alpha}. \end{aligned}$$

Koristeći relaciju

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$$

(koja se dobiva iz poučka o sinusima za trokute ABC, ACM i BCM) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\sin\varphi}{\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cos\psi - \cos\varphi} &= \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta - \cos\alpha}, \\ \frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} &= \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}, \end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana.

3. Vrijedi općenita tvrdnja: ako se na ploči nalaze brojevi a_1, a_2, ..., a_n nakon $n-1$ koraka na ploči će se nalaziti broj $(a_1+1)(a_2+1)...(a_n+1)-1$. Dokažimo to!

Uočimo da je $a_1+a_2+a_1a_2=(a_1+1)(a_2+1)-1$, pa za dva broja tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da nakon $n-2$ koraka na ploči imamo brojeve $(a_1+1)...(a_{n-1}+1)-1$ i a_n. Tada je

$$\begin{aligned} & [((a_1+1)...(a_{n-1}+1)-1)+1](a_n+1)-1 \\ = \ & (a_1+1)...(a_{n-1}+1)(a_n+1)-1. \end{aligned}$$

Time smo metodom matematičke indukcije dokazali općenitu tvrdnju. Vidimo da će rezultat biti neovisan o tome kojim redom biramo brojeve. Za zadane brojeve rezultat je

$$\begin{aligned} & (1+1)(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{3}+1)...(\frac{1}{2000}+1)(\frac{1}{2001}+1)-1 \\ = \ & 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2001}{2000}\cdot\frac{2002}{2001}-1 \\ = \ & 2002-1=2001. \end{aligned}$$

4. Za svaki neprazan podskup Z od S neka $\prod(Z)$ označava produkt svih elemenata od Z. Broj $\prod(Z)$ možemo prikazati u obliku c^2m_Z, gdje je c^2 najveći kvadrat cijelog broja koji dijeli taj produkt. Svaki m_Z je produkt različitih prostih brojeva, od kojih je svaki manji od 200. Kako ima manje od 100 takvih brojeva, nema više od 2^{99} mogućnosti za broj m_Z.

Broj mogućih podskupova Z jednak je broju nepraznih podskupova skupa S, točnije $2^{100}-1$. Kako je $2^{100}-1>2^{99}$, moraju postojati dva neprazna podskupa X i Y skupa S takva da je $m_X=m_Y$. Ako je $\prod(X)=a^2m_X$ i $\prod(Y)=b^2m_Y=b^2m_X$, tada je $\prod(X)\cdot\prod(Y)=a^2m_X\cdot b^2m_X$ potpuni kvadrat.

Neka je T skup svih elemenata koji su ili u X ili u Y, ali ne u oba skupa (simetrična razlika skupova X i Y). Kako je $X\neq Y$, skup T nije prazan. Tada se svaki broj u $X\cap Y$ pojavljuje dvaput u produktu $\prod(X)\cdot\prod(Y)$, pa imamo $\prod(X)\cdot\prod(Y)=\prod(T)\cdot(\prod(X\cap Y))^2$. Kako je $\prod(X)\cdot\prod(Y)$ potpuni kvadrat, onda je i $\prod(T)$, također potpuni kvadrat.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

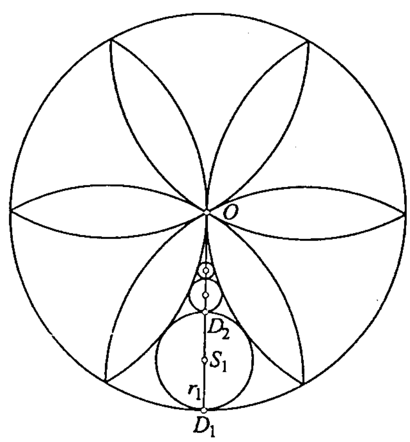
MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Makarska, 9. - 12. svibnja 2001. godine

IV. razred

1. Na slici su unutar kružnice sa središtem O i polumjerom 1 nacrtani lukovi još šest kružnica istog polumjera. U području između dvije susjedne "latice" upisan je niz kružnica s polumjerima $r_1, r_2, r_3, \ldots$, koje se s početnom kružnicom i susjednim kružnicama u nizu dodiruju redom u točkama $D_1, D_2, D_3, \ldots$. Za svaki n izračunajte polumjer r_n i duljinu $d_n = |OD_n|$.



2. Papir oblika kvadrata s vrhovima F, B, H i D ima stranicu duljine a. Na njegovim stranicama $\overline{FB}$ i $\overline{BH}$, označene su točke G i A, odnosno E i C, takve da je $|FG| = |GA| = |AB|$ i $|BE| = |EC| = |CH|$. Papir je presavinut po dužinama $\overline{DG}$, $\overline{DA}$, $\overline{DC}$ i $\overline{AC}$ tako da se točka G poklopi s B, a točke F i H s točkom E. Odredite volumen tako nastale trostrane piramide $ABCD$.

3. Dan je broj $n = p_1p_2p_3p_4$, gdje su p_1, p_2, p_3 i p_4 četiri različita prosta broja. Njegovi pozitivni cjelobrojni djelitelji su

$$d_1 = 1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_{15} < d_{16} = n.$$

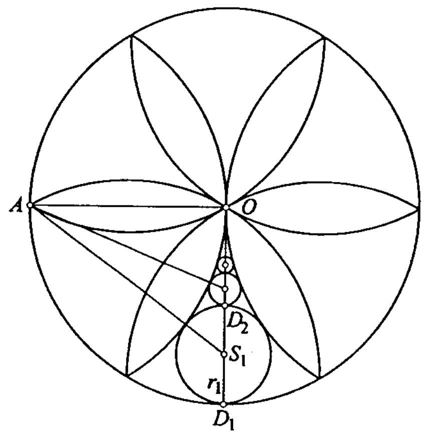
Postoji li $n < 2001$, takav da je $d_9 - d_8 = 22$?

4. Tablica idmenzija $n \times n$ ispunjena je jedinicama i nulama. Poznato je da ne postoje četiri jedinice na mjestima koje čine pravokutnik. Dokažite da je broj jedinica u tablici najviše $\frac{n}{2}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)$.

Rješenja za IV. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

1. Iz pravokutnog trokuta AOS_1, zbog $OD_1 = 1$ dobivamo

$$(1+r_1)^2 - (1-r_1)^2 = 1, \quad \text{tj.} \quad r_1 = \frac{1}{4}.$$



Zato je $|OD_2| = |OD_1| - 2r_1 = \frac{1}{2}$. Iz pravokutnog trokuta AOS_2 je

$$(1+r_2)^2 - (\frac{1}{2} - r_2)^2 = 1, \quad \text{tj.} \quad r_2 = \frac{1}{12}.$$

Zato je $|OD_3| = |OD_2| - 2r_2 = \frac{1}{3}$. Iz pravokutnog trokuta AOS_3 je

$$(1+r_3)^2 - (\frac{1}{3} - r_3)^2 = 1, \quad \text{tj.} \quad r_3 = \frac{1}{24}.$$

Zato je $|OD_4| = |OD_3| - 2r_3 = \frac{1}{4}$.

Pretpostavimo da je $|OD_n| = \frac{1}{n}$. Iz pravokutnog trokuta AOS_n dobivamo

$$(1+r_n)^2 - (\frac{1}{n} - r_n)^2 = 1, \quad \text{tj.} \quad r_n = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

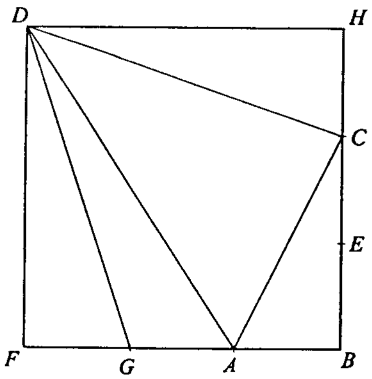
Zato je

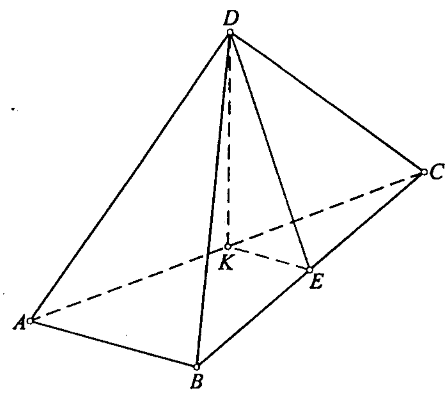
$$|OD_{n+1}| = |OD_n| - 2r_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

Općenito imamo formule:

$$|OD_n| = \frac{1}{n}, \qquad r_n = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

2. Duljine bridova tetraedra su: $|AB| = \frac{1}{3}a$, $|BC| = \frac{2}{3}a$, $|AC| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$, $|DA| = \frac{a\sqrt{13}}{3}$, $|DG| = |DC| = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.





Trokut ABC je pravokutan, točka E je polovište katete $\overline{BC}$, a točka K neka je polovište hipotenuze $\overline{AC}$. Dužina $\overline{EK}$ je srednjica trokuta ABC, te je okomita na stranicu $\overline{BC}$. Također, kako je trokut BCD jednakokračan, vrijedi $DE \perp BC$. Odavde zaključujemo da je ravnina DEK okomita na pravac BC, pa i ravninu ABC. Stoga se visina tetraedra iz točke D nalazi u ravnini DEK i podudara se s visinom trokuta DEK iz vrha D.

Dužina $\overline{DK}$ je težišnica trokuta ACD, pa joj je duljina (prema formuli $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$), $|DK| = \frac{a\sqrt{41}}{6}$. Nadalje je $|KE| = \frac{1}{6}a$, $|DE| = a$. Sada možemo, koristeći Heronovu formulu, odrediti površinu trokuta DEK, $P(DEK) = \frac{a^2\sqrt{2}}{18}$. Odavde je visina trokuta DEK iz vrha D,

$$v = \frac{2P(DEK)}{|KE|} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Baza piramide je pravokutan trokut ABC površine

$$B = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| = \frac{a^2}{9}.$$

Konačno je traženi volumen piramide

$$V = \frac{1}{3}Bv = \frac{2a^3\sqrt{2}}{81}.$$

3. Za svaki djelitelj d od n, broj $\frac{n}{d}$ je također djelitelj od n. Ako je m broj djelitelja broja n, onda je $\frac{n}{d_k} = d_{m+1-k}$. Zato je $d_8 d_9 = n$.

Možemo pretpostaviti da je $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$. Moguća su ova dva slučaja:

1° Jedan od brojeva d_8, d_9 je prost i jednak p_4, a drugi $p_1 p_2 p_3$.

2° Svaki od brojeva d_8 i d_9 je produkt dva prosta broja.

Pretpostavimo da je $n < 2001$ i $d_9 - d_8 = 22$. Kako je $\frac{n}{d_8} = d_9$, brojevi d_8 i d_9 ne mogu biti oba parna, a budući je $d_9 - d_8$ paran, d_8 i d_9 moraju oba biti neparna. Dakle, p_1, p_2, p_3, p_4 su neparni. Nadalje, ne mogu oba broja d_8 i d_9 biti djeljiva s 11, a kako 11 dijeli $d_9 - d_8$, nijedan od brojeva d_8 i d_9 nije djeljiv s 11.

Iz $d_9 - d_8 = 22$ i $n = d_8 d_9$, tj. $n = d_8^2 + 22 d_8 = (d_8 + 11)^2 - 121$, slijedi

$$(d_8 + 11)^2 = n + 121 < 2001 + 121 < 47^2,$$

odnosno, $d_8 < 47 - 11 = 36$ i $d_9 < 36 + 22 = 58$.

1° Primijetimo da je $p_1 p_2 p_3 \geq 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, pa se prvi slučaj ne može dogoditi.

2° Pretpostavimo da je $p_1 > 3$. Tada je $p_1 \geq 5$, $p_2 \geq 7$, $p_3 \geq 13$, $p_4 \geq 17$ (jer ne može biti $p_i = 11$), pa je $p_1 p_4 \geq 85$, $p_2 p_3 \geq 91$, što je kontradikcija s $d_8 < 36$, $d_9 < 58$. Dakle, mora biti $p_1 = 3$.

Pretpostavimo da je $p_2 > 5$. Tada je $p_2 \geq 7$, $p_3 \geq 13$, $p_4 \geq 17$, dakle, $p_1 p_4 \geq 51$, $p_2 p_3 \geq 91$; kontradikcija. Zato je $p_2 = 5$.

Ako je $p_3 > 7$, onda je $p_3 \geq 13$, $p_4 \geq 17$, pa je $p_1 p_4 \geq 51$, $p_2 p_3 \geq 65$, što je također nemoguće.

Dakle, $p_3 = 7$, $p_4 \geq 13$. Sada je $p_2 p_3 = 35$ i $p_1 p_4 \geq 39$, dakle, $d_8 = 35$ i $d_9 = 35 + 22 = 57 = 3 \cdot 19$. Jedina je mogućnost $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 19$, tj. $n = 1995$.

4. Označimo s d_i broj jedinica u i-tom retku. Tada je broj parova jedinica u i-tom retku $\binom{d_i}{2}$.

Pošto ne postoje četiri jedinice koje čine pravokutnik, mora po Dirichletovom principu biti

$$\begin{aligned}
\sum_i \binom{d_i}{2} &\le \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \\
\sum_i d_i(d_i-1) &\le n(n-1), \\
\sum_i d_i^2 - \sum_i d_i &\le n(n-1), \\
\sum_i d_i^2 &\le n(n-1) + \sum_i d_i. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Označimo li ukupan broj jedinica u tablici s K, vrijedi $K = \sum_i d_i$.

Nadalje, koristeći nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine, dobivamo

$$n\left(\sum_i d_i^2\right) \ge \left(\sum_i d_i\right)^2 = K^2,$$

pa iz $(*)$ slijedi

$$K^2 - nK - n^2(n-1) \le 0.$$

Pozitivno rješenje ove jednadžbe je

$$\begin{aligned}
K &= \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n^2(n-1)}}{2} \\
&= \frac{n}{2}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right).
\end{aligned}$$

Odavde slijedi tvrdnja.