MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

6. travnja 2001.

I. razred

1. Ako je $x + y + z = 0$, pojednostavnite izraz

$$\frac{x^7 + y^7 + z^7}{xyz(x^4 + y^4 + z^4)}.$$

Uputa: najprije izračunajte $(x + y)^4$ i $(x + y)^6$.

2. Postoji li cijeli broj x za koji su oba broja $\frac{14x + 5}{9}$ i $\frac{17x - 5}{12}$ cijela?

3. Kružnice k_1 i k_2 s polumjerima r_1 i r_2 $(r_1 < r_2)$ dodiruju se iznutra u točki P. Neka je q jedna tangenta na k_1, koja ju dodiruje u točki R, i paralelna je zajedničkom promjeru danih kružnica. Neka su M i N sjecišta tangente q s k_2. Dokažite da je PR simetrala kuta $\sphericalangle MPN$.

4. Dva igrača stavljaju pješake na ploču dimenzija 2001 × 2001. Igrač može staviti pješaka na prazno mjesto na ploči ako i samo ako u pripadnom retku i stupcu zajedno, ima više od 1000 slobodnih mjesta. Gubi onaj igrač koji ne može staviti pješaka. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. a) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.
b) $(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$. 5 bodova
Sada imamo

$$\begin{aligned} x^7+y^7+z^7 &= x^7+y^7-(x+y)^7 \\ &= (x+y)[x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6 \\ &\quad -(x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6)] \\ &= -z(-7x^5y-14x^4y^2-21x^3y^3-14x^2y^4-7xy^5) \\ &= 7xyz(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4), \end{aligned}$$

10 bodova

$$x^4+y^4+z^4 = x^4+y^4+(x+y)^4 = 2(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4),$$ 5 bodova

pa dijeljenjem slijedi

$$\frac{x^7+y^7+z^7}{x^4+y^4+z^4} = \frac{7}{2}xyz,$$

i traženi izraz je jednak $\frac{7}{2}$. 5 bodova

2. *Prvo rješenje.* Napišimo brojeve u obliku

$$\frac{14x+5}{9} = x + \frac{5}{9}(x+1), \quad \frac{17x-5}{12} = x + \frac{5}{12}(x-1).$$ 5 bodova

Da bi oba broja bila cijela, morao bi $x+1$ biti djeljiv s 9 i $x-1$ s 12, pa bi $(x+1)$ i $(x-1)$ morali biti djeljivi s 3, a očito ne mogu oba biti djeljiva s 3 jer se razlikuju za 2. 20 bodova

Drugo rješenje. Pretpostavimo da je $\frac{14x+5}{9} = m$ i $\frac{17x-5}{12} = n$, gdje su m i n cijeli brojevi. 5 bodova
Tada iz

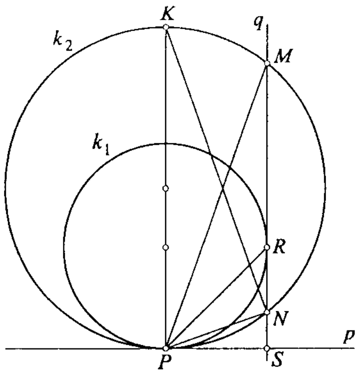
$$\frac{9m-5}{14} = x = \frac{12n+5}{17},$$

slijedi

$$3(51m-56n) = 155.$$ 10 bodova

Kako je lijeva strana posljednje jednakosti djeljiva s 3, a desna nije, znači da pretpostavka nije istinita, tj. ne postoji cijeli broj x za koji su $\frac{14x+5}{9}$ i $\frac{17x-5}{12}$ cijeli brojevi. 10 bodova

3. Neka je O središte kružnice k_1.



Četverokut $OPSR$ je kvadrat, pa je $\sphericalangle RPS = \sphericalangle SRP = 45^\circ$. 5 bodova
Nadalje, vrijedi

$$\sphericalangle SMP = \sphericalangle NPS. \qquad (*)$$ 5 bodova

Sada je

$$\begin{aligned} \sphericalangle RPN &= \sphericalangle RPS - \sphericalangle NPS = 45^\circ - \sphericalangle NPS, \\ \sphericalangle MPR &= 180^\circ - \sphericalangle PRM - \sphericalangle RMP = 45^\circ - \sphericalangle RMP = 45^\circ - \sphericalangle SMP, \end{aligned}$$

10 bodova

odakle je $\sphericalangle RPN = \sphericalangle MPR$. 5 bodova

Napomena. Jednakost $(*)$ nije potrebno dokazivati, iako je dokaz, uz pravilnu sliku, vrlo lagan:

$$\sphericalangle SMP = \sphericalangle NMP = \sphericalangle NKP = 90^\circ - \sphericalangle KPN = \sphericalangle NPS.$$

4. Pobjedničku strategiju ima igrač koji je prvi na potezu. Označimo igrače s A i B. Igrač A najprije postavi pješaka u središte ploče. 5 bodova
Sada B mora postaviti svog pješaka na neko mjesto. U sljedećem potezu A postavi svog pješaka na polje koje je centralno simetrično polju na koje je stavio pješaka igrač B. Dalje igrač A provodi istu taktiku, tj. stavlja svog pješaka na polje koje je centralno simetrično polju na koje je stavio pješaka igrač B, a to uvijek može jer drugi igrač mora prvi birati polje. Ta strategija je pobjednička za igrača A. 20 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

6. travnja 2001.

II. razred

1. Nađite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi

$$\left|\frac{1}{z-i}+1\right|=1 \quad \text{i} \quad \left|\frac{1}{z-i}-i\right|=1.$$

2. Ako su svakoj od jednadžbi $x^2+px+q=0$ i $x^2+px-q=0$ oba rješenja cjelobrojna, dokažite da tada postoje cijeli brojevi a i b takvi da je $p^2=a^2+b^2$.

3. a) Trokutu ABC upisana je kružnica koja redom dodiruje stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u točkama D, E, F. Dokažite da se pravci AD, BE, CF sijeku u istoj točki P.

   b) Dokažite da nijedan od kutova $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle CPA$ nije pravi.

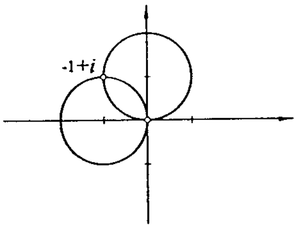
4. Neka su n i k prirodni brojevi. Dokažite da broj znamenaka u zapisu broja 5^n nije veći od k, ako i samo ako broj znamenaka u zapisu broja 2^n nije veći od $n-k+1$.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Iz danog uvjeta se vidi da mora biti

$$\frac{1}{z-i}=0 \quad \text{ili} \quad \frac{1}{z-i}=-1+i.$$

5 bodova



Prvi slučaj, očito, nije moguć.

5 bodova

U drugom je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-i} &= -1+i, \\
z-i &= \frac{1}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}, \\
z &= -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

15 bodova

Drugo rješenje. Uvrštavajući $z=x+iy$, dobivamo

$$\left|\frac{1}{x+iy-i}+1\right| = 1 \qquad \left|\frac{1}{x+iy-i}-i\right| = 1,$$

5 bodova

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x+1+i(y-1)}{x+i(y-1)}\right| &= 1 & \qquad \left|\frac{y-ix}{x+i(y-1)}\right| &= 1, \\
|x+1+i(y-1)| &= |x+i(y-1)| & |y-ix| &= |x+i(y-1)|, \\
(x+1)^2+(y-1)^2 &= x^2+(y-1)^2 & y^2+x^2 &= x^2+(y-1)^2, \\
x &= -\frac{1}{2} & y &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

15 bodova

Dakle, $z=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$.

5 bodova

2. Najprije ćemo pokazati da p i q moraju biti cijeli brojevi. Neka je $p^2 - 4q = m^2$ i $p^2 + 4q = n^2$, za neke pozitivne realne brojeve m i n. Rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$ su $(-p \pm m)/2$. Kako zbroj obaju rješenja mora biti cijeli broj, mora $-p$ biti cijeli broj, tj. i p je cijeli broj. Budući da je i razlika rješenja cijeli broj, mora m biti cijeli broj. Kako je i produkt rješenja cijeli broj, q mora biti cijeli broj. (Slično se iz druge jednadžbe dobiva da n mora biti cijeli broj.) 10 bodova

Iz $p^2 - 4q = m^2$ i $p^2 + 4q = n^2$ zaključujemo da m i n moraju biti iste parnosti kao p. 5 bodova

Zbrajanjem ovih jednakosti dobije se $2p^2 = m^2 + n^2$, tj.

$$p^2 = \frac{m^2 + n^2}{2} = \left[\frac{(m+n)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(m-n)}{2}\right]^2,$$

što je zbroj dvaju kvadrata cijelih brojeva, jer su m i n iste parnosti. Zato možemo staviti $a = \dfrac{m+n}{2}$ i $b = \dfrac{m-n}{2}$. 10 bodova

3. a) Neka je $BE \cap CF = P$ i $AP \cap BC = D'$. Iz omjera površina trokuta dobivamo:

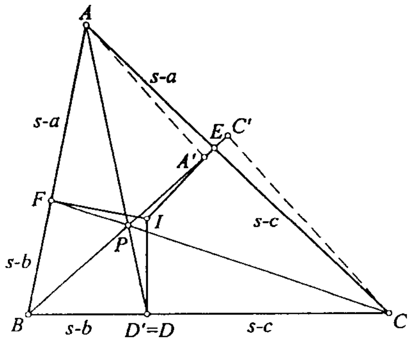
$$\frac{P(ABP)}{P(BCP)} = \frac{|AA'|}{|CC'|} = \frac{|AE|}{|CE|} = \frac{s-a}{s-c},$$

$$\frac{P(BCP)}{P(CAP)} = \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{s-b}{s-a},$$

odakle je,

$$\frac{|BD'|}{|CD'|} = \frac{P(ABP)}{P(CAP)} = \frac{s-b}{s-c} = \frac{|BD|}{|CD|},$$

a odavde je $D' = D$. Zato se pravci AD, BE, CF sijeku u istoj točki. 15 bodova



Napomena. Zadatak se može riješiti i pomoću Cevinog teorema. Iz

$$1 = \frac{P(ABP)}{P(BCP)} \cdot \frac{P(BCP)}{P(CAP)} \cdot \frac{P(CAP)}{P(ABP)} = \frac{|AE|}{|CE|} \cdot \frac{|BF|}{|AF|} \cdot \frac{|CD|}{|BD|},$$

po Cevinom teoremu slijedi da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki.

b) Pretpostavimo da je $\sphericalangle BPC = \frac{\pi}{2}$, tj. $|BP|^2 + |CP|^2 = a^2$. Tada bi bilo

$$\sphericalangle BPF = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \sphericalangle CPE = \frac{\pi}{2},$$

pa je zato $|BF| > |BP|$ i $|CE| > |CP|$, i vrijedilo bi

$$|BP|^2 + |CP|^2 < |BF|^2 + |CE|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 < (|BD| + |DC|)^2 = a^2,$$

što je u suprotnosti s pretpostavkom. Zato $\sphericalangle BPC$ ne može biti pravi. 10 bodova

4.

Broj znamenaka u zapisu broja 5^n je manji ili jednak k

$$\begin{aligned} &\iff 5^n < 10^k \\ &\iff 10^n < 10^k \cdot 2^n \\ &\iff 10^{n-k} < 2^n \\ &\iff 10^{n-k} \leq 2^n \quad (\text{jer je uvijek } 10^{n-k} \neq 2^n) \end{aligned}$$

pa je broj znamenaka u zapisu od 2^n veći ili jednak od $n - k + 1$. 25 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

6. travnja 2001.

III. razred

1. Odredite sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\log_2 \left[2\cos^2(xy) + \frac{1}{2\cos^2(xy)} \right] - 1 = -\left(y - \frac{1}{2} \right)^2 .$$

2. Točka P nalazi se unutar trokuta ABC tako da je $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCA = \varphi$. Ako su α, β i γ kutovi trokuta, dokažite da je

$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma}.$$

3. Svaka od četiri kugle radijusa R dodiruje preostale tri. Izračunajte radijus r kugle koja se može upisati između njih.

4. Na jednom automatu koji radi na žetone od po 1, 10 i 25 kuna možete igrati ovu igru: ako stavite žeton od 1 kune, dobijete jedan žeton od 10 kuna; ako stavite žeton od 10 kuna, dobijete jedan žeton od 1 kune i jedan žeton od 25 kuna; ako stavite žeton od 25 kuna, dobijete dva žetona od po 10 kuna. Na početku ste imali jedan žeton od 10 kuna. Nakon nekog vremena utvrdili ste da imate točno 100 žetona od 1 kune i nešto drugih žetona. Koja je najmanja vrijednost žetona koju ste do tada mogli osvojili?

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. S obzirom da su $2\cos^2(xy)$ i $\dfrac{1}{2\cos^2(xy)}$ pozitivni brojevi, možemo primijeniti AG nejednakost:

$$2\cos^2(xy) + \frac{1}{2\cos^2(xy)} \geq 2\sqrt{2\cos^2(xy) \cdot \frac{1}{2\cos^2(xy)}} = 2. \qquad \text{5 bodova}$$

Odavde slijedi,

$$\log_2 \left[2\cos^2(xy) + \frac{1}{2\cos^2(xy)}\right] - 1 \geq \log_2 2 - 1 = 0.$$

S druge strane je $-\left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0$. Dakle, da bi vrijedila jednakost, mora biti $y = \dfrac{1}{2}$ i

$$2\cos^2(xy) = \frac{1}{2\cos^2(xy)}. \qquad \text{10 bodova}$$

Slijedi,

$$2\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}.$$

Odavde dobivamo

$$\cos^4\frac{x}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{2},$$

tj. $\cos x = 0$ i $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$.

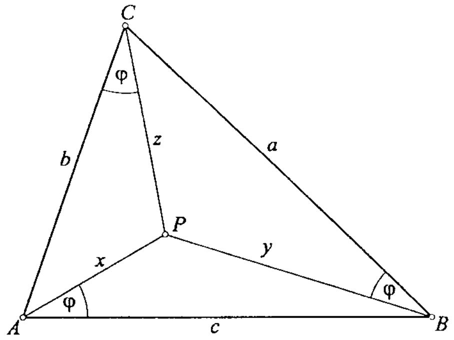
Dakle, $(x, y) \in \left\{\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \; : \; k \in \mathbf{Z}\right\}$. 10 bodova

2. Neka je P površina trokuta ABC, a, b, c, duljine njegovih stranica i $|AP| = x$, $|BP| = y$, $|CP| = z$.
Kako je $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CAB - \sphericalangle PAB = \alpha - \varphi$, to je $\sphericalangle APC = 180^\circ - \alpha$.
Primijenimo poučak o sinusima redom na trokute CAP, ABP, BCP:

$$\frac{x}{b} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha},$$

$$\frac{y}{c} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta},$$

$$\frac{z}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma},$$



10 bodova

Vrijedi

$$\begin{aligned} P &= P(ABP) + P(BCP) + P(CAP) \\ &= \frac{xc\sin\varphi}{2} + \frac{ya\sin\varphi}{2} + \frac{zb\sin\varphi}{2}. \end{aligned}$$

5 bodova

Kako je $2P = bc\sin\alpha = ca\sin\beta = ab\sin\gamma$, to je

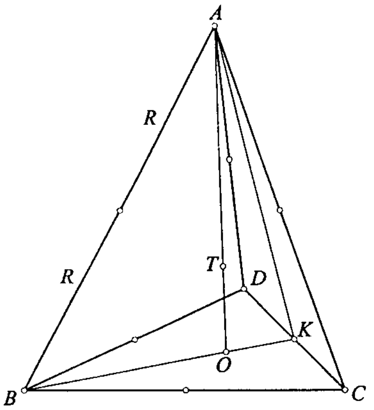
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin\varphi} &= \frac{xc}{bc\sin\alpha} + \frac{ya}{ca\sin\beta} + \frac{zb}{ab\sin\gamma}, \\ \frac{1}{\sin\varphi} &= \frac{x}{b\sin\alpha} + \frac{y}{c\sin\beta} + \frac{z}{a\sin\gamma}. \qquad (*) \end{aligned}$$

Uvrstimo li te jednakosti u $(*)$, dobijemo

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma}.$$

10 bodova

3. Središta danih kugala su vrhovi pravilnog tetraedra brida duljine $a = 2R$. Središte tražene kugle je njegovo središte (težište), koje označimo s T. Sada vrijedi $R + r = |AT|$. 5 bodova



Težište dijeli težišnicu tetraedra u omjeru $|AT| : |TO| = 3 : 1$, tj. $|AT| = \frac{3}{4}|AO| = \frac{3}{4}v$, gdje je v visina tetraedra. 5 bodova

Iz trokuta AOK se dobiva:

$$\begin{aligned} |AO|^2 &= |AK|^2 - |OK|^2 \\ v^2 &= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \quad \text{tj.} \\ v &= a\sqrt{\frac{2}{3}} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

10 bodova

Sada je $|AT| = \frac{R\sqrt{6}}{2}$ i konačno

$$r = \frac{R(\sqrt{6} - 2)}{2}.$$

5 bodova

4. *Prvo rješenje.* Neka (a, b, c) označava trenutan broj žetona: a od 1 kune, b od 10 kuna i c od 25 kuna. Nakon

ubacivanja žetona od 1 kune, imat ćemo $(a - 1, b + 1, c)$;
ubacivanja žetona od 10 kuna, imat ćemo $(a + 1, b - 1, c + 1)$;
ubacivanja žetona od 25 kuna, imat ćemo $(a, b + 2, c - 1)$. 5 bodova

Na početku smo imali $(0, 1, 0)$. Recimo da smo x puta ubacili jedan žeton od 1 kune, y puta žeton od 10 kuna i z puta žeton od 25 kuna. Nakon toga imat ćemo

$$(-x + y, 1 + x - y + 2z, y - z).$$

Kako na kraju imamo točno 100 žetona od 1 kune, dobivamo

$$-x + y = 100.$$

5 bodova

Nađimo najmanju moguću vrijedost za

$$\begin{aligned} S &= 1 \cdot (-x+y) + 10 \cdot (1+x-y+2z) + 25 \cdot (y-z) \\ &= 10 + 9x + 16y - 5z. \end{aligned}$$

Zbog $x = y - 100$, ovaj izraz prelazi u

$$S = 10 + 9y - 900 + 16y - 5z = -890 + 5(5y - z).$$

To će biti najmanje kada $5y - z$ bude najmanje moguće. Mora biti y što manje, a z što veće.
Uočimo da mora biti: $1 + x - y + 2z \geq 0$, $y - z \geq 0$,
odnosno, $2z \geq 99$, $z \geq 50$ i $y \geq z$.
Rezultat je najmanji za $y = z = 100$, i tada je $S = 1110$. 10 bodova

Pogledajmo da li je zaista mogao na kraju osvojiti točno 1110 kuna. Ubacivanjem jednog žetona od 10 kuna i onda žetona od 25 kuna, dobiva se žeton od 1 kune i žeton od 10 kuna. Počevši s jednim žetonom od 10 kuna i naizmjeničnim ubacivanjem žetona od 10 i 25 kuna dobije se 100 žetona od 1 i 101 žeton od 10 kuna.
Ukupna, minimalna zarada od $M = 1110$ kuna zaista se može osvojiti. 5 bodova

Drugo rješenje. Pretpostavimo da se za vrijeme igre ubaci x žetona od 1 kune, y žetona od 10 kuna i z žetona od 25 kuna, a na kraju ima X žetona od 1 kune, Y žetona od 10 kuna i Z žetona od 25 kuna. Znamo da je $X = 100$.

Svaki put kada se ubaci žeton od 10 kuna poveća se broj žetona od 1 kune za jedan i svaki put kada se ubaci žeton od 1 kune smanji se broj žetona od 1 kune za jedan. Naravno, kada se ubaci žeton od 25 kuna nije se mijenjao broj žetona od 1 kune. Kako na početku nije imao nijedan žeton od 1 kune, vrijedi

$$X = y - x.$$

Kada se ubaci žeton od 10 kuna broj žetona od 25 kuna se poveća za jedan i svaki put kada se ubaci žeton od 25 kuna, broj žetona od 25 kuna se smanji za jedan. Ubacivanje žetona od 1 kune nije utjecalo na broj žetona od 25 kuna, a kako na početku nije bio nijedan žeton od 25 kuna, vrijedi

$$Z = y - z.$$

Na kraju, izrazimo Y, uzimajući u obzir da se ubacivanjem jednog žetona od 1 kune, broj žetona od 10 kuna povećao za jedan; svaki put kada se ubaci žeton od 10 kuna, njihov broj se smanjio za jedan; i svaki put kada se ubaci žeton od 25 kuna, broj žetona od 10 kuna se poveća za dva. Kako je na početku bio jedan žeton od 10 kuna,

$$Y = 1 + x - y + 2z.$$ 10 bodova

Iz jednadžbi koje su izvedene dobiva se

$$Y + 2Z = 1 + y + x \geq 1 + y - x = 1 + X,$$

pri čemu nejednakost vrijedi jer je $x \geq 0$. Neka je S ukupna vrijednost u kunama koju je na kraju osvojio. Tada je

$$\begin{aligned} S &= X + 10Y + 25Z \geq X + 10(Y + 2Z) \\ &\geq X + 10(X + 1) = 11X + 10 = 1110. \end{aligned}$$

Dakle, imao je vrijednost žetona od barem 1110 kuna. 10 bodova

Da je to zaista najmanja osvojena zarada, može se dokazati kao na kraju prvog rješenja.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

6. travnja 2001.

IV. razred

1. Odredite geometrijsko mjesto točaka M u Kartezijevoj koordinatnoj ravnini takvih da su tangente povučene iz točke M na parabolu $y = x^2$ međusobno okomite.

2. Odredite sumu brojeva

$$1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^4 + \ldots + 2001 \cdot 2^{2000}.$$

3. a) Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ u kojima brojevi 1 i 2 nisu susjedni?

   b) Koliko ima permutacija skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ u kojima nikoja dva elementa skupa $\{1, 2, 3\}$ nisu susjedna?

4. Dokažite da postoji bar jedan pravac koji istodobno raspolavlja i površinu i opseg danog konveksnog mnogokuta.

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Jednadžbu tangente koja prolazi kroz točku (x_0, y_0) zapišimo u obliku

$$y = k(x - x_0) + y_0,$$

gdje je k koeficijent smjera tangente. Kako ona dodiruje parabolu $y = x^2$ imamo

$$x^2 = k(x - x_0) + y_0,$$

$$x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0.$$

10 bodova

Kako tangenta dodiruje parabolu u jednoj i samo jednoj točki, mora diskriminanta ove kvadratne jednadžbe biti jednaka nuli, tj.

$$k^2 - 4x_0k + 4y_0 = 0. \qquad (1)$$ 5 bodova

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su koeficijenti smjerova k_1 i k_2 tangenata iz točaka traženog skupa na parabolu. Kako su one međusobno okomite, mora biti $k_1k_2 = -1$. Iz kvadratne jednadžbe (1) dobivamo

$$k_1k_2 = 4y_0, \quad \text{tj.} \quad 4y_0 = -1.$$ 5 bodova

Vidimo da uvjet okomitosti ne ovisi o x_0. Zato je traženi skup točaka pravac $y = -\frac{1}{4}$. 5 bodova

2. Označimo ovu sumu sa S. Tada je

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{1999} & + & 2^{2000} \\
 & & & + & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{1999} & + & 2^{2000} \\
 & & & & & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{1999} & + & 2^{2000} \\
 & & & & & & & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{1999} & + & 2^{2000} \\
 & & & & & & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & & & & & + & 2^{1999} & + & 2^{2000} \\
 & & & & & & & & & & & & & + & 2^{2000}
\end{array}$$

5 bodova

U svakom retku je zbroj članova geometrijskog niza. Zato je

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1\cdot(2^{2001}-1)}{2-1}+\frac{2\cdot(2^{2000}-1)}{2-1}+\ldots+\frac{2^{1999}\cdot(2^2-1)}{2-1}+2^{2000}(2-1)\\
&= 2001\cdot 2^{2001}-(1+2+2^2+\ldots+2^{1999}+2^{2000})\\
&= 2001\cdot 2^{2001}-\frac{2^{2001}-1}{2-1}\\
&= 2000\cdot 2^{2001}+1.
\end{aligned}
$$

20 bodova

3. a) Od broja svih permutacija skupa $\{1,2,3,\ldots,n\}$, tj. $n!$, treba oduzeti broj permutacija kod kojih se pojavljuju 1 i 2 zajedno. Broj permutacija kod kojih se pojavljuje $\overline{12}$ ima $(n-1)!$, jer $\overline{12}$ promatramo kao jedan element. Isto tako je broj permutacija kod kojih se pojavljuje $\overline{21}$ jednak $(n-1)!$. Dakle, broj svih permutacija kod kojih se ne pojavljuje $\overline{12}$ ili $\overline{21}$ je jednak

$$n!-2\cdot(n-1)!.$$

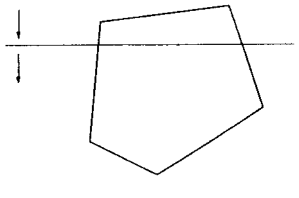
10 bodova

b) Skup A svih permutacija skupa $\{1,2,3,\ldots,n\}$ ima $n!$ elemenata. Neka su B, C, D skupovi permutacija kod kojih su susjedni, tim redom, 1 i 2, 1 i 3, 2 i 3. Prema dokazu iz a) svaki od skupova B, C, D, ima po $2\cdot(n-1)!$. Svaku permutaciju u kojoj se pojavljuje $\overline{abc}$, pri čemu je $\{a,b,c\}=\{1,2,3\}$, brojili smo dvaput, one u kojoj se pojavljuje $\overline{ab}$ i $\overline{bc}$. Broj permutacija kod kojih se pojavljuje dano $\overline{abc}$ ima $(n-2)!$. Kako je broj permutacija skupa $\{1,2,3\}$ jednak 6, broj svih permutacija kod kojih su susjedna neka dva od brojeva 1, 2, 3, jednak je $6\cdot(n-1)!-6\cdot(n-2)!$. Zato je broj svih permutacija kod kojih nisu susjedna nikoja dva od brojeva 1, 2, 3, jednak

$$n!-6\cdot(n-1)!+6\cdot(n-2)!.$$

15 bodova

4. a) Dokažimo najprije da za svaki smjer postoji točno jedan pravac tog smjera, koji raspolavlja dani mnogokut (bilo u smislu površina ili u smislu opsega). Zbog jednostavnosti uzmimo da se radi o horizontalnim pravcima. Translatirajmo promatrani pravac od gornjeg ruba prema dolje. Površina (ili opseg) gornjeg dijela mnokokuta raste, a donjeg dijela pada, pa postoji točno jedan položaj pravca kod kojeg su oba dijela (gornji i donji) jednaki.



10 bodova