MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za županijsko natjecanje učenika osnovnih škola Republike Hrvatske

6. travnja 2001. godine

7. razred

1. Riješi jednadžbu

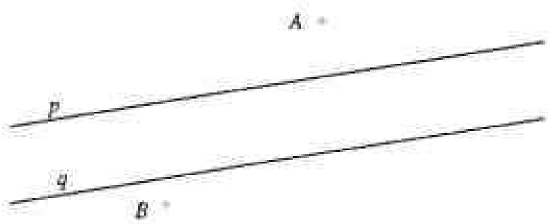
$$3.8-(0.8-4.5x)=\left(1\frac{2}{5}+3.5:1\frac{1}{4}\right):2\frac{2}{5}+3.4:1\frac{8}{9}+2.4x-0.35+1.5x \ .$$

2. Odredi najmanji cijeli broj x za kojeg vrijedi $x>y-1$ i $2y-1>0$.

3. Dućan sportske opreme prodaje romobile koje nabavlja od proizvođača. Zarada dućana po prodanom romobilu iznosi 10% njegove nabavne cijene. Kad bi dućan romobile nabavljao po 10% nižoj nabavnoj cijeni, a prodavao sa zaradom od 20% te nabavne cijene, prodajna cijena romobila bila bi 15 kn manja. Kolika je prodajna cijena romobila?

4. Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ šiljastokutnog trokuta ABC s vanjske su strane nacrtani kvadrati $ACMN$ i $CBED$. Dokaži da je $|AD|=|BM|$ i $AD\perp BM$.

5. Dana su dva usporedna pravca p i q, te točke A i B, kao na slici. Neka je A_1 simetrična točka točki A, a B_1 simetrična točka točki B s obzirom na pravac p, te A_2 simetrična točka točki A_1, a B_2 simetrična točka točki B_1 s obzirom na pravac q. Dokaži da dužine $\overline{AB_2}$ i $\overline{BA_2}$ raspolavljaju jedna drugu.



ŽN 2001

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izvršimo li naznačene operacije, imamo redom:

$3.8 - 0.8 + 4.5x = (1\frac{2}{5} + 2\frac{4}{5}) : 2\frac{2}{5} + 1\frac{4}{5} + 2.4x - 0.35 + 1.5x,$ 2 BODA

$3 + 4.5x = 4\frac{1}{5} : 2\frac{2}{5} + 1\frac{4}{5} + 3.9x - 0.35,$ 2 BODA

$3 + 4.5x = 1\frac{3}{4} + 1\frac{4}{5} + 3.9x - 0.35,$ 1 BOD

$3 + 4.5x = 3.2 + 3.9x,$ 1 BOD

$0.6x = 0.2,$ 2 BODA

$x = \frac{1}{3}.$ 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Iz nejednakosti $x > y - 1$ slijedi nejednakost $x + 1 > y$. 1 BOD

Iz nejednakosti $2y - 1 > 0$ dobivamo $2y > 1$, tj. $y > \frac{1}{2}$. 2 BODA

Zato je $x + 1 > y > \frac{1}{2}$, 2 BODA

pa zbog tranzitivnosti imamo da je $x + 1 > \frac{1}{2}$, odnosno $x > \frac{1}{2} - 1$ tj. $x > -\frac{1}{2}$. 3 BODA

Prema tome, najmanji traženi cijeli broj je $x = 0$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je x nabavna cijena jednog romobila, izražena u kunama. Budući da je zarada 10%, tj. $0.1x$, slijedi da je prodajna cijena $1.1x$ kn. 1 BOD

Nabavna cijena niža 10% bila bi $0.9x$ kn. 1 BOD

Tada bi zarada od 20% na tu nabavnu cijenu bila $0.9x \cdot 0.2 = 0.18x$ kn, 1 BOD

a to znači da bi prodajna cijena uz navedene uvjete bila $0.9x + 0.18x = 1.08x$ kn. 2 BODA

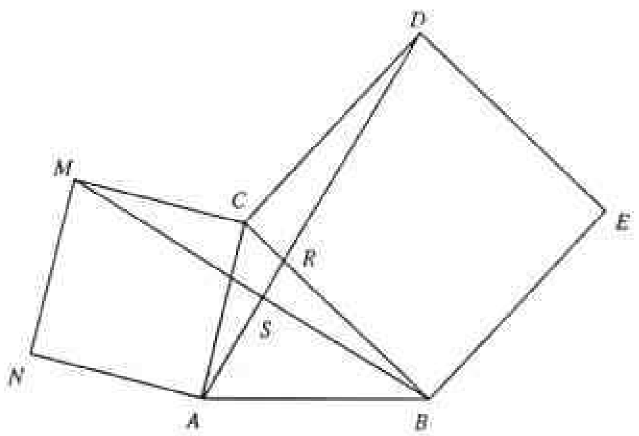
Zato vrijedi jednadžba $1.08x + 15 = 1.1x$. 2 BODA

Njeno rješenje je $x = 750$. 1 BOD

Prema tome, prodajna cijena romobila je $750 + 75 = 825$ kn. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

4.



Skica 1 BOD

Prvo treba dokazati da je $\triangle ADC \cong \triangle MCB$. Naime, očito je $|AC| = |CM|$ i $|CD| = |BC|$. Osim toga, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACM$, pa zbog $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACM = 90°$ slijedi da je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB + 90° = \sphericalangle BCM$. Time je sukladnost dokazana (S-K-S). 3 BODA

Zbog toga je dalje $|AD| = |BM|$. 1 BOD

Neka je točka S presjek pravaca AD i BM, a točka R presjek pravca AD i stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Za dokaz okomitosti pravaca AD i BM dovoljno je promatrati kutove trokuta BSR i DCR. 2 BODA

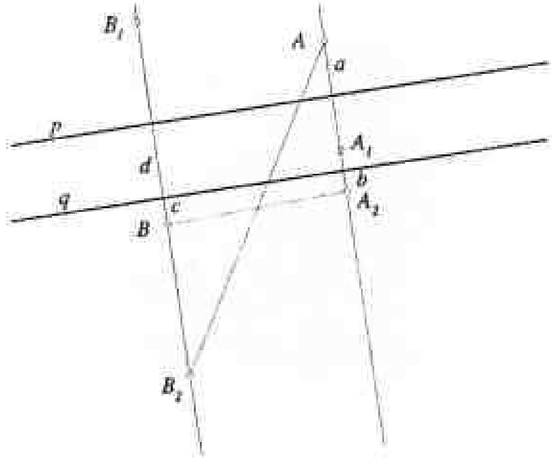
Budući da je zbog dokazane sukladnosti $\sphericalangle ADC = \sphericalangle RDC = \sphericalangle MBC = \sphericalangle SBR$, tj. $\sphericalangle RDC = \sphericalangle SBR$, a vrijedi i $\sphericalangle BRS = \sphericalangle DRC$, jer su to vršni kutovi, zaključujemo da trokuti BSR i DCR imaju dva para jednakih kutova. 2 BODA

To znači da im je i treći par kutova jednak. Zato je $\sphericalangle BSR = \sphericalangle DCR = \sphericalangle DCB = 90°$, iz čega slijedi da je $AD \perp BM$. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

M7 ŽN 2001.

5.



Slika i određivanje točaka A_2 i B_2 2 BODA

Označimo s d udaljenost usporednih pravaca p i q. Neka je a udaljenost točke A od pravca p, a b udaljenost točke A_1 od pravca q. Prema definiciji osne simetrije slijedi da je $|AA_1| = 2a$ i $|A_1A_2| = 2b$. Zato je $|AA_2| = 2a + 2b$, a zbog $a + b = d$ dalje i $|AA_2| = 2d$. 2 BODA

Neka je c udaljenost točke B od pravca q. Tada je udaljenost točke B od pravca p jednaka $c + d$, iz čega slijedi da je $|BB_1| = 2(d + c)$. To znači da je udaljenost točke B_1 od pravca q jednaka $2d + 2c - c$, tj. $2d + c$. Kako je i točka B_2 od pravca q udaljena za $2d + c$, slijedi da je $|BB_2| = 2d + c - c$, tj. $|BB_2| = 2d$. 2 BODA

Sada je očito $|AA_2| = |BB_2|$. 1 BOD

Zbog $AA_2 \perp p$ i $B_1B_2 \perp p$ slijedi da su pravci AA_2 i BB_2 usporedni, pa zaključujemo da je četverokut ABB_2A_2 paralelogram. 2 BODA

Kako su dužine $\overline{AB_2}$ i $\overline{BA_2}$ dijagonale tog paralelograma, a dijagonale paralelograma međusobno se raspolavljaju, slijedi da dužine $\overline{AB_2}$ i $\overline{BA_2}$ raspolavljaju jedna drugu. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA