ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Zadar, 2. – 5. svibnja 2002. godine

## I. razred

**1.** Duljina srednjice trapeza je 4 a kutovi uz jednu osnovicu su $40°$ i $50°$. Odredite duljine osnovica ako je udaljenost njihovih polovišta jednaka 1.

**2.** Dokažite da za bilo koje pozitivne brojeve $a$, $b$, $c$ i bilo koji nenegativan pozitivan broj $p$ vrijedi nejednakost

$$a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2} \geq a^p bc + b^p ca + c^p ab\,.$$

**3.** Nađite sve trojke $(x, y, z)$ prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 576.$$

*Naputak:* Izraz s lijeve strane jednadžbe rastavite na faktore.

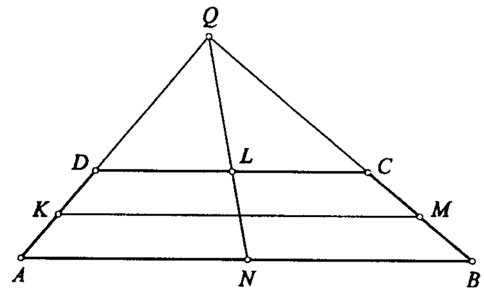
**4.** "Kolo sreće" podijeljeno je na 30 odjeljaka u koje su upisani brojevi 50, 100, 150, ..., 1500 (u nekom redoslijedu). Dokažite da postoje tri uzastopna odjeljka u kojima je zbroj upisanih brojeva veći ili jednak 2350.

Rješenja za I. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

**1.** Pravci $AD$ i $BC$ sijeku se u točki $Q$, a $L$ i $N$ su polovoišta osnovica $DC$ i $AB$. Tada je $\measuredangle AQB = 90°$. Iz sličnosti trokuta $ABQ$ i $DCQ$ dobivamo

$$\frac{|AQ|}{|DQ|} = \frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|AN|}{|DL|},$$

odakle slijedi da je $\triangle QDL \sim \triangle QAN$, tj. točke $Q$, $L$, $N$ su kolinearne.




Kako je trokut $ABQ$ pravokutan, vrijedi $|AN| = |BN| = |QN|$, i analogno, $|DL| = |CL| = |QL|$. Sada je

$$\begin{aligned} \frac{|AB|}{2} - \frac{|CD|}{2} &= |QN| - |QL| = |LN| = 1, \\ \frac{|AB| + |CD|}{2} &= 4, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$|AB| - |CD| = 2,$$

$$|AB| + |CD| = 8,$$

tj. $|AB| = 5$, $|CD| = 3$.

**2.** Koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za pozitivne brojeve $x$ i $y$

$$2xy \le x^2 + y^2,$$

možemo zapisati

$$2(a^p bc + b^p ca + c^2 ab) \le a^p(b^2 + c^2) + b^p(c^2 + a^2) + c^p(a^2 + b^2).$$

Da bismo dokazali traženu nejednakost dovoljno je dokazati

$$2(a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2}) \ge a^p(b^2 + c^2) + b^p(c^2 + a^2) + c^p(a^2 + b^2).$$

Za dokaz ove nejednakosti dovoljno je dokazati ove tri:

$$a^{p+2} + b^{p+2} \geq a^p b^2 + b^p a^2, \qquad (1)$$

$$a^{p+2} + c^{p+2} \geq a^p c^2 + c^p a^2, \qquad (2)$$

$$b^{p+2} + c^{p+2} \geq b^p c^2 + c^p b^2. \qquad (3)$$

Prva nejednakost ekvivalentna je ovoj:

$$a^p(a^2 - b^2) - b^p(a^2 - b^2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2)(a^p - b^p) \geq 0.$$

Kako ova nejednakost vrijedi, vrijedi i (1). Analogno se dokazuju i preostale dvije.

**3.** Izraz na ljevoj strani rastavi se na faktore:

$$\begin{aligned} & 4x^2y^2 - (x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2x^2z^2) \\ = \; & (2xy)^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2 = (2xy - x^2 - y^2 + z^2)(2xy + x^2 + y^2 - z^2) \\ = \; & (z^2 - (x-y)^2)\left((x+y)^2 - z^2\right) \\ = \; & (z - x + y)(z + x - y)(x + y - z)(x + y + z). \end{aligned}$$

Jednadžba poprima oblik

$$(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z) = 576.$$

Brojevi $(x + y + z)$, $(x + y - z)$, $(x - y + z)$, $(-x + y + z)$ su iste parnosti, pa sva četiri moraju biti parna (jer je desna strana parna). Označimo $x + y + z = 2a$, $x + y - z = 2b$, $x - y + z = 2c$, $-x + y + z = 2d$. Sada je

$$16\,a\,b\,c\,d = 576 \qquad \text{odnosno} \qquad a\,b\,c\,d = 36.$$

Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti $x \geq y \geq z$, tj. $a > b \geq c \geq d$. Očito je $a = b + c + d$ , a jedina faktorizacija broja 36 na 4 faktora koja to zadvoljava je $36 = 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, odakle slijedi $x = a - d = 5$, $y = a - c = 4$, $z = a - b = 3$.

Stoga su sva rješenja dane jednadžbe
$(x, y, z) \in \{(5,4,3), (5,3,4), (4,5,3), (4,3,5), (3,5,4), (3,4,5)\}$.

**4.** Označimo zbrojeve od po tri uzastopna odjeljka sa $S_1$, $S_2$, ..., $S_{30}$. U zbroju $S_1 + S_2 + \ldots + S_{30}$ svaki od brojeva 50, 100, 150, ...,1500 pribrojen je tri puta, pa je

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \ldots + S_{30} &= 3 \cdot (50 + 100 + \ldots 1500) \\ &= 150 \cdot (1 + 2 + \ldots + 30) = 150 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} = 69\,750. \end{aligned}$$

Kad bi svaki od brojeva $S_1$, $S_2$, ..., $S_{30}$ bio manji od 2350, onda bi svaki bio jednak ili manji od 2300 (jer svaki mora biti djeljiv s 50), pa bi slijedilo

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_{30} \leq 30 \cdot 2300 = 69\,000 < 69\,750,$$

što je kontradikcija. Prema tome, postoji $1 \leq i \leq 30$ takav da je $S_i \geq 2350$.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

**MATEMATIKA**

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Zadar, 2. – 5. svibnja 2002. godine

II. razred

**1.** Nađite sva rješenja jednadžbe

$$(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3\,.$$

**2.** Neka su $a$, $b$, $c$ realni brojevi veći od 1. Dokažite sljedeću nejednakost

$$\log_a\left(\frac{b^2}{ac}-b+ac\right)\log_b\left(\frac{c^2}{ab}-c+ab\right)\log_c\left(\frac{a^2}{bc}-a+bc\right)\geq 1.$$

**3.** Ako za trokute s duljinama stranica $a$, $b$. $c$ i $a'$, $b'$, $c'$ te nasuprotnim kutovima $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ vrijede jednakosti $\alpha+\alpha'=\pi$ i $\beta=\beta'$, dokažite da vrijedi i jednakost $aa'=bb'+cc'$.

**4.** Odredite sve pozitivne cijele brojeve $n$ za koje jednadžba

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

ima točno pet rješenja $(x,y)$ u skupu pozitivnih cijelih brojeva.

Rješenja za II. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

**1.** Uz zamjene $u = x^2 + 3x - 4$, $v = 2x^2 - 5x + 3$, jednadžba poprima oblik

$$u^3 + v^3 = (u + v)^3,$$

odnosno

$$3uv(u + v) = 0.$$

Odatle slijedi

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \text{ili} \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \text{ili} \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

te su sva rješenja zadane jednadžbe

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \quad x_4 = -\frac{1}{3}, \quad x_5 = \frac{3}{2}, \quad x_6 = -4.$$

**2.** Primjenom A-G nejednakosti dobivamo

$$\frac{a^2}{bc} + bc \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc} \cdot bc} = 2a.$$

Zbog $c > 1$ je

$$\frac{a^2}{bc} - a + bc \geq a \quad \Rightarrow \quad \log_c\left(\frac{a^2}{bc} - a + bc\right) \geq \log_c a.$$

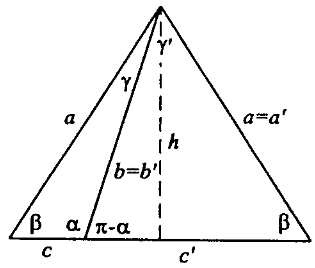
Analogno, zbog $b > 1$ i $a > 1$ dobivamo:

$$\log_b\left(\frac{c^2}{ab} - c + ab\right) \geq \log_b c, \quad \log_a\left(\frac{b^2}{ac} - b + ac\right) \geq \log_a b.$$

Množenjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\log_a\left(\frac{b^2}{ac} - b + ac\right) \log_b\left(\frac{c^2}{ab} - c + ab\right) \log_c\left(\frac{a^2}{bc} - a + bc\right) \geq \log_a b \log_b c \log_c a = 1.$$

**3.** Zamijenimo li jedan trokut njemu sličnim trokutom, to nema utjecaja na tvrdnju. Zato možemo uzeti da je $b = b'$. Tada trokute možemo smjestiti kao na slici, pa zbog $\beta = \beta'$ mora biti $a' = a$. Treba dokazati jednakost $a^2 = b^2 + cc'$.




Ako je $h$ visina jednakokračnog trokuta sa stranicama $a, a, (c + c')$, tada imamo:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c + c'}{2}\right)^2, \quad b^2 = h^2 + \left(\frac{c' - c}{2}\right)^2,$$

odakle oduzimanjem slijedi $a^2 - b^2 = cc'$.

**4.** Množenjem jednadžbe s $nxy$ dobivamo

$$\begin{aligned} xy &= n(x + y) \\ xy - nx - ny + n^2 &= n^2 \\ (x - n)(y - n) &= n^2. \qquad (*) \end{aligned}$$

Promatrajmo rastav na proste faktore broja $n$ tj. $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, gdje su $p_i$ različiti prosti brojevi, a $\alpha_i \geq 1$ $i = 1, \dots, k$. Broj rješenja jednadžbe $(*)$ jednak je broju rastava broja $n^2$ na dva faktora, tj.

$$(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \dots (2\alpha_k + 1).$$

jer eksponent broja $p_1$ u prvom faktoru može biti $0, 1, \dots, 2\alpha_1$, itd. Taj broj može biti jednak 5 jedino za $k = 1$. Tada je $\alpha_1 = 2$, tj. $n = p^2$, gdje je $p$ prost broj.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Zadar, 2. – 5. svibnja 2002. godine

## III. razred

1. U trokutu $ABC$ kutovi $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle CBA$ su šiljasti. S vanjske strane trokuta nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, kao bazama, konstruirani su jednakokračni trokuti $ACD$ i $BCE$ s vršnim kutovima $\sphericalangle ADC = \beta$, odnosno $\sphericalangle BEC = \alpha$. Neka je $O$ središte kružnice opisane trokutu $ABC$. Dokažite da je $|DO| + |EO|$ jednako opsegu trokuta $ABC$ ako i samo ako je $\sphericalangle ACB$ pravi.

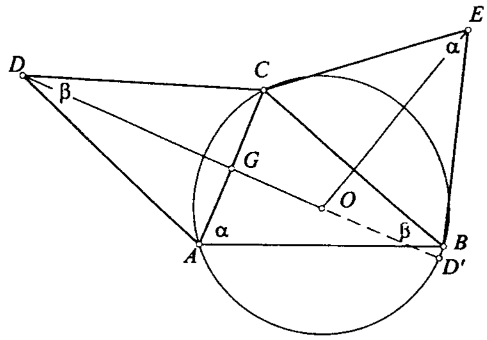
2. Dokažite da se prirodan broj može prikazati kao zbroj dva ili više uzastopnih prirodnih brojeva ako i samo ako taj broj nije potencija broja 2.

3. Na dijagonalama $\overline{AB_1}$ i $\overline{CA_1}$ bočnih strana $ABB_1A_1$ i $CAA_1C_1$ trostrane prizme $ABCA_1B_1C_1$ dane su točke $E$ i $F$ takve da je $EF \parallel BC_1$. Nađite omjer duljina dužina $\overline{EF}$ i $\overline{BC_1}$.

4. Na otoku živi $n$ domorodaca. Svaka dva su ili prijatelji ili neprijatelji. Jednog dana poglavica naredi svim stanovnicima (uključujući i sebe) da si naprave i da nose kamene ogrlice, tako da svaka dva prijatelja imaju barem po jedan istovrsni kamen u svojim ogrlicama, a da se sva kamenja u ogrlicama dvaju neprijatelja razlikuju. (Ogrlica može biti i bez kamenja.) Dokažite da se poglavičina zapovijed može izvršiti koristeći $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ različitih vrsta kamenja, i da se općenito ovo ne može postići s manje kamenja.

Rješenja za III. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

**1.** Točke $O$ i $D$ leže na simetrali stranice $\overline{AC}$. Neka je $G$ polovište stranice $\overline{AC}$, a $D'$ točka simetrična točki $D$ u odnosu na $\overline{AC}$. Točka $D'$ leži na kružnici opisanoj trokutu $ABC$ jer je $\sphericalangle AD'C = \sphericalangle ADC = \beta = \sphericalangle ABC$.




Stoga je

$$|DO| = |DG| + |GO| = r + 2|GO| = r + 2r\cos\beta,$$

gdje smo s $r$ označili polumjer kružnice opisane trokut $ABC$.
Na sličan način je $|EO| = r + 2r\cos\alpha$.
Dakle, $|DO| + |EO| = 2r(1 + \cos\alpha + \cos\beta)$. Opseg trokuta $ABC$ je $a + b + c = 2r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$. Treba odrediti uz koje uvjete vrijedi

$$1 + \cos\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Imamo redom

$$\begin{aligned}
1 + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma \\
2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) &= 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 1 \\
2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right) &= -\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 \\
\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Ako je $\gamma = \frac{\pi}{2}$, prva je zagrada jednaka 0. Ako je $\gamma \neq 90°$, mora biti

$$2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2},$$

no, zbog $\frac{\alpha-\beta}{2} < \frac{\pi}{4}$ je $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} > \sqrt{2}$, što je kontradikcija.

**2.** Pretpostavimo najprije da se broj $n$ može prikazati kao zbroj uzastopnih prirodnih brojeva, tj. da je oblika

$$n = m + (m+1) + \ldots + (m+k) \qquad \text{za neke } m, k \in \mathbf{N}.$$

Tada je

$$n = (k+1)m + 1 + 2 + \ldots + k = (k+1)m + \frac{k(k+1)}{2} = (k+1)\left(m + \frac{k}{2}\right).$$

Ako je $k$ paran, onda broj $n$ ima neparan faktor $k+1 \geq 3$, pa nije potencija broja 2.

Ako je $k$ neparan, može se napisati kao $k = 2l - 1$, $l \in \mathbf{N}$, pa je

$$n = 2l\left(m + \frac{2l-1}{2}\right) = l(2(m+l) - 1).$$

U ovom slučaju $n$ također ima neparan faktor $2(m+l) - 1 \geq 3$, i $n$ nije potencija broja 2.

Pretpostavimo sada da $n$ nije potencija od 2. Onda se može prikazati kao $n = 2^m(2k+1)$ za neke $m \in \mathbf{N}_0$, $k \in \mathbf{N}$. Primijetimo da je

$$n = 2^{m+1}k + 2^m = (k - 2^m + 1) + (k - 2^m + 2) + \ldots + (k + 2^m).$$

Ako je $k \geq 2^m$, to je prikaz broja $n$ kao zbroja uzastopnih prirodnih brojeva.

Za $k < 2^m$ u gornjem zbroju ima negativnih brojeva, ali oni se krate s brojevima $1, 2, \ldots, 2^m - k - 1$. Točnije, možemo $n$ prikazati kao zbroj

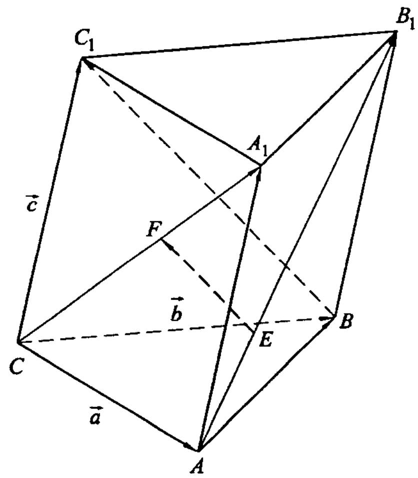
$$n = (2^m - k) + (2^m - k + 1) + \ldots + (2^m + k).$$

U oba slučaja vidimo da se $n$ može prikazati kao zbroj uzastopnih prirodnih brojeva.

**3.** Stavimo $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{c}$. Prikažimo vektore $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ i $\overrightarrow{BC_1}$ po bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB_1} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \\
\overrightarrow{CA_1} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} + \vec{c}, \\
\overrightarrow{BC_1} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\vec{b} + \vec{c}.
\end{aligned}$$

Zbog kolinearnosti vektora $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AB_1}$ postoji broj $x$ takav da je $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB_1} = x(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$. Analogno, postoji broj $y$ takav da je $\overrightarrow{CF} = y\overrightarrow{CA_1} = y(\vec{a}+\vec{c})$. Iz uvjeta $EF \parallel BC_1$, slijedi da postoji broj $z$ takav da je $\overrightarrow{EF} = z\overrightarrow{BC_1} = z(-\vec{b}+\vec{c})$.



Promatrajući zatvorenu izlomljenu liniju $CAEF$, imamo $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}$, odakle je

$$-\vec{a} = x(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + z(-\vec{b} + \vec{c}) - y(\vec{a} + \vec{c}), \text{ tj.}$$

$$(1 - x - y)\vec{a} + (x - z)\vec{b} + (x + z - y)\vec{c} = \vec{0}.$$

Zbog jedinstvenosti prikaza vektora u bazi, posljednja vektorska jednadžba ekvivalentna je s tri skalarne jednadžbe: $1 - x - y = 0$, $x - z = 0$ i $x + z - y = 0$. Odavde je $x = z = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Traženi omjer je $|EF| : |BC_1| = |z| = \frac{1}{3}$.

**4.** Za dokaz se koristi matematička indukcija.

Za $n = 1$ i $n = 2$, tvrdnja očito vrijedi.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n = k$. Dokazat ćemo da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 2$. Ako su svi domoroci međusobno neprijatelji onda uopće ne treba kamenja. Pretpostavimo da među domorocima postoji par prijatelja, i označimo ih s A i B. Po pretpostavci ostalih $k$ domorodaca može svoje ogrlice napraviti od najviše $\left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor$ vrsta kamenja. Kako su A i B prijatelji, oni mogu uzeti novu vrstu kamena i staviti ga na svoje ogrlice.

Promotrimo nekog od ostalih $k$ domorodaca, neka je to C. Postoje ove tri mogućnosti:

1° C je neprijatelj i A-u i B-u;

2° C je prijatelj i A-u i B-u;

3° C je prijatelj jednom i neprijatelj drugom.

U prvom slučaju novih vrsta kamenja ne treba. U drugom slučaju sva trojica mogu staviti novu vrstu kamenja na svoje ogrlice, a u trećem slučaju samo C i njegov prijatelj. U svakom slučaju, najviše se još jedna vrsta kamenja koristi. Stoga ukupno treba najviše $\left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor + 1 + k$ (jedan za A i B i po jedan za svakog od preostalih $k$ domorodaca), a to je jednako $\left\lfloor \frac{k^2}{4} + k + 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(k+2)^2}{4} \right\rfloor$.

Odavde slijedi da je dovoljno $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ vrsta kamenja.

Pokažimo da je zaista toliko vrsta kamenja potrebno, tj. odredimo podjelu "prijatelj–neprijatelj" za koju je potreban najveći broj vrsta kamenja. Za parno $n$, $n = 2m$, podijelimo domoroce u dvije jednakobrojne grupe. Neka su svaka dva domoroca u istoj grupi neprijatelji, a svaka dva u različitim grupama prijatelji. Tada im je potrebno točno $m^2 = \frac{n^2}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ vrsta kamenja. Naime, parova prijatelja ima $m^2$, a nikoja tri domoroca ne mogu nositi istu vrstu kamenja jer su među njima barem dvojica neprijatelji.

Ako je $n = 2m + 1$, podijelimo domoroce u dvije grupe od $m$ i $(m+1)$ osoba. Neka su, kao i prije, svaka dva domoroca iz iste grupe neprijatelji, a iz različitih grupa prijatelji. U ovom slučaju potrebno im je

$$m(m+1) = \frac{4m^2 + 4m}{4} = \left\lfloor \frac{4m^2 + 4m + 1}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(2m+1)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

vrsta kamenja.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

**MATEMATIKA**

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Zadar, 2. – 5. svibnja 2002. godine

IV. razred

1. Izračunajte beskonačni zbroj $s = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} + \ldots$, gdje je $|x| < 1$.

2. Vrhovi kocke u prostornom koordinatnom sustavu s ishodištem $O$ su u točkama $A(1,1,1)$, $A'(-1,-1,-1)$, $B(-1,1,1)$, $B'(1,-1,-1)$, $C(-1,-1,1)$, $C'(1,1,-1)$, $D(1,-1,1)$, $D'(-1,1,-1)$. Točka $O$ je središte kocki opisane sfere. Neka točka $T$ nije na toj sferi i $d = |OT|$. Označimo s $\alpha = \sphericalangle ATA'$, $\beta = \sphericalangle BTB'$, $\gamma = \sphericalangle CTC'$ i $\delta = \sphericalangle DTD'$. Dokažite da je
$$\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma + \mathrm{tg}^2\delta = \frac{32d^2}{(d^2-3)^2}.$$

3. Neka je $f(x) = x^{2002} - x^{2001} + 1$. Dokazati da su za svaki prirodan broj $m$ brojevi $m$, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ..., u parovima relativno prosti, tj. da nikoja dva među njima nemaju zajednički djelitelj veći od 1.

4. Neka je $(a_n)$, $n \in \mathbf{N}$ rastući niz prirodnih brojeva. Za član $a_k$ tog niza kažemo da je *dobar* ako se može prikazati kao suma nekih drugih (ne nužno različitih) članova tog niza. Dokažite da su svi članovi tog niza, osim njih konačno mnogo, *dobri*.

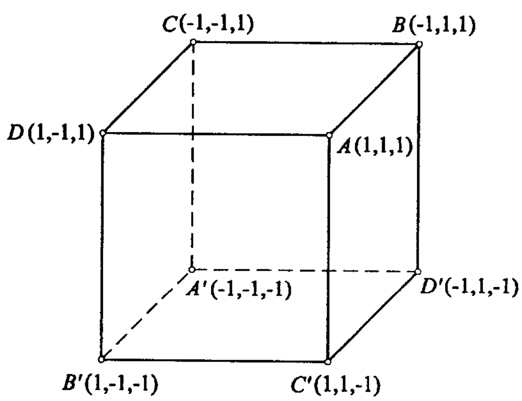
Rješenja za IV. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

**1.** Imamo redom

$$\begin{aligned}(1-x)s &= s - sx = 1 + 3x + 5x^2 + \ldots + (2n-1)x^{n-1} + \ldots = s',\\ (1-x)^2 s &= s' - s'x = 1 + 2x + 2x^2 + \ldots = s'',\\ (1-x)^3 s &= s'' - s''x = 1 + x,\end{aligned}$$

pa je zato $s = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$.

**2.** Točka $O$ je upravo ishodište $(0,0,0)$ koordinatnog sustava. Neka je $T = (x,y,z)$. Tada je $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Primijenit ćemo kosinusov poučak na trokut $AA'T$.




$$\begin{aligned}|AT|^2 &= (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = d^2 - 2(x+y+z) + 3,\\ |A'T|^2 &= (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = d^2 + 2(x+y+z) + 3,\\ |AA'|^2 &= 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12;\\ \cos\alpha &= \frac{|AT|^2 + |A'T|^2 - |AA'|^2}{2|AT|\cdot|A'T|} = \frac{d^2-3}{|AT|\cdot|A'T|};\\ \mathrm{tg}^2\alpha &= \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{|AT|^2\cdot|A'T|^2}{(d^2-3)^2} - 1\\ &= \frac{(d^2+3)^2 - 4(x+y+z)^2}{(d^2-3)^2} - 1 = \frac{8d^2 - 8(xy+yz+zx)}{(d^2-3)^2}.\end{aligned}$$

Analogno dobivamo za preostale kutove:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}^2\beta &= \frac{8d^2 - 8(-xy + yz - zx)}{(d^2 - 3)^2},\\
\mathrm{tg}^2\gamma &= \frac{8d^2 - 8(xy - yz - zx)}{(d^2 - 3)^2},\\
\mathrm{tg}^2\delta &= \frac{8d^2 - 8(-xy - yz + zx)}{(d^2 - 3)^2}.
\end{aligned}$$

Odavde dobivamo

$$\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma + \mathrm{tg}^2\delta = \frac{32d^2}{(d^2 - 3)^2}.$$

**3.** Neka je $P_n(x) = f(f(f(...(x)...)))$ ($n$ $f$-ova). Budući da je $f(0) = 1$ i $f(1) = 1$ odavde slijedi $P_n(0) = 0$ za svaki $n \in \mathbf{N}$. $P_k(x)$ je polinom sa slobodnim članom $P_k(0) = 1$. Stoga $P_n(m)$ pri dijeljenju s $m > 1$ daje ostatak 1.

Pretpostavimo da prirodan broj $d > 1$ dijeli $P_k(m)$ i $P_{k+l}(m)$. Iz $P_{k+l}(m) = P_l(P_k(m))$ slijedi da $P_{k+l}(m)$ daje ostatak 1 pri dijeljenju s $P_k(m)$; $P_{k+l}(m) = Q \cdot P_k(m) + 1$. Odavde slijedi da $d$ dijeli 1, što nije moguće.

Zato su svi brojevi $m$, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ..., relativno prosti.

**4.** Ako je $a_k$ *dobar* broj, on se može prikazati kao suma nekoliko članova niza s indeksom manjim od $k$. Dovoljno je pokazati da postoji $n_0$ takav da za sve $n > n_0$ vrijedi $a_n = l_1a_1 + l_2a_2 + \ldots + l_{n-1}a_{n-1}$, za neke $l_i \in \mathbf{N}_0$, $1 \le i \le n-1$.

Pokazat ćemo da svaki broj $a_n$, za $n \ge n_0$, (gdje $n_0$ treba odrediti), možemo prikazati ovako: $a_n = a_k + la_1$ za neki $k < n$.

Za svaki $r \in \{0, 1, \ldots, a_1 - 1\}$ neka je $M(r)$ skup indeksa $i$ za koje je $a_i \equiv r \pmod{a_1}$. Ako je $M(r) = \emptyset$, stavimo $m_r = 0$, a ako $M(r) \neq \emptyset$ stavimo $m_r = \min M(r)$. Tvrdimo da je dovoljno staviti $n_0 = \max\{m_0, m_1, \ldots, m_{a_1-1}\}$.

Naime, tada za $n > n_0$ postoji $k < n_0$ takav da $a_n \equiv a_k \pmod{a_1}$, tj. $a_n = a_k + la_1$, što smo i tvrdili.