MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 2001.
2002.

I. razred

1. Neka su a, b i c međusobno različiti realni brojevi, od kojih nijedan nije jednak nuli, i za koje je $a+b+c=0$. Dokažite da vrijedi:

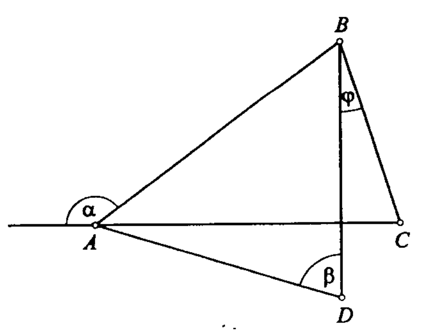
a) $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=3$,

b) $\left(\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}\right)=9$.

2. Riješite sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} |x+y-4| &= 5\,, \\ |x-3|+|y-1| &= 5\,. \end{aligned}$$

3. Dane su četiri točke A, B, C i D u ravnini tako da je $|AB|=|AC|$ i $|AD|=|BD|$. Ako za kutove α i β označene na slici vrijedi $\alpha+\beta=200°$, odredite kut $\varphi=\sphericalangle CBD$.



4. Ako je n neparan prirodan broj, dokažite da je broj n^3+3n^2-n-3 djeljiv s 48.

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* a)

$$a+b+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=-(a+b) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} &= \frac{a^2}{-b(a+b)}+\frac{b^2}{-(a+b)a}+\frac{(a+b)^2}{ab} \\
= \frac{-a^3-b^3+(a+b)^3}{ab(a+b)} &= \frac{(a+b)(-a^2+ab-b^2+a^2+2ab+b^2)}{ab(a+b)} \\
= \frac{3ab}{ab} &= 3.
\end{aligned}$$

10 bodova

b)

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=$$

$$= \left(\frac{a-b}{-a-b}+\frac{b+a+b}{a}+\frac{-a-b-a}{b}\right)\left(\frac{-a-b}{a-b}+\frac{a}{b+a+b}+\frac{b}{-a-b-a}\right)$$

$$= \left(-\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+2b}{a}-\frac{2a+b}{b}\right)\left(-\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{a+2b}-\frac{b}{2a+b}\right)$$

$$= \left(-\frac{a-b}{a+b}-\frac{-ab-2b^2+2a^2+ab}{ab}\right)\left(-\frac{a+b}{a-b}+\frac{2a^2+ab-ab-2b^2}{(a+2b)(2a+b)}\right)$$

$$= \left(-\frac{a-b}{a+b}-\frac{2(a^2-b^2)}{ab}\right)\left(-\frac{a+b}{a-b}+\frac{2(a^2-b^2)}{(a+2b)(2a+b)}\right)$$

$$= -(a-b)\frac{ab+2(a+b)^2}{(a+b)ab}\cdot(a+b)\frac{2(a-b)^2-(a+2b)(2a+b)}{(a+2b)(2a+b)(a-b)}$$

$$= -\frac{2a^2+5ab+2b^2}{ab}\cdot\frac{2a^2-4ab+2b^2-2a^2-ab-4ab-2b^2}{2a^2+5ab+2b^2}$$

$$= -\frac{-9ab}{ab} = 9.$$

15 bodova

Drugo rješenje. a) Iz $a+b+c=0$ dobivamo:

$$a^2=(b+c)^2, \quad b^2=(c+a)^2, \quad c^2=(a+b)^2.$$

Zato je:

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\\
=\ &\frac{b^2+c^2+2bc}{bc}+\frac{c^2+a^2+2ca}{ca}+\frac{a^2+b^2+2ab}{ab}\\
=\ &\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+2+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\\
=\ &6+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\\
=\ &6+\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=3.
\end{aligned}$$

10 bodova

b)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)\\
=\ &3+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)+\frac{a}{b-c}\left(\frac{a-b}{c}+\frac{c-a}{b}\right)\\
&+\frac{b}{c-a}\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}\right)\\
=\ &3+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}+\frac{a}{b-c}\cdot\frac{ab-b^2+c^2-ac}{bc}\\
&+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{a^2-ab+bc-c^2}{ca}\\
=\ &3+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(b-a)(b+a-c)}{ab}+\frac{a}{b-c}\cdot\frac{(c-b)(c+b-a)}{bc}\\
&+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{(a-c)(a+c-b)}{ca}\\
=\ &3+\frac{c(c-a-b)}{ab}+\frac{a(a-b-c)}{bc}+\frac{b(b-a-c)}{ca}.
\end{aligned}$$

Kako je $c-a-b=2c$, $a-b-c=2a$, $b-a-c=2b$, iz a) posljednji izraz je jednak

$$3+2\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}\right)=3+2\cdot 3=9.$$

15 bodova

Treće rješenje b)

Uvedimo oznake $C = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}$ i $D = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}$.

$$\begin{aligned} C &= (a-b)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + (c-a)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{(a-b)(a-c)}{ca} + \frac{(c-a)(a-b)}{ab} \\ &= (a-b)(c-a)\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{ca}\right) \\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{-a-b}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} \\ &= a\left(\frac{1}{b-c} - \frac{1}{a-b}\right) + b\left(\frac{1}{c-a} - \frac{1}{a-b}\right) \\ &= \frac{a(a-2b+c)}{(b-c)(a-b)} + \frac{b(2a-b-c)}{(c-a)(a-b)} \\ &= \frac{-3ab}{(b-c)(a-b)} + \frac{3ab}{(c-a)(a-b)} \\ &= \frac{-3ab(c-a-b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= -\frac{9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}. \end{aligned}$$

Odavde slijedi $C \cdot D = 9$. 15 bodova

Napomena. Moguće je i djelomično bodovanje.

2. *Prvo rješenje.* Dani sistem jednadžbi se može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} |x+y-4| &= 5, \\ |x-3|+|y-1| &= 5, \\ |x+y-4| &= |x-3|+|y-1|, \end{aligned}$$

gdje, zbog $x+y-4=x-3+y-1$, moraju $x-3$ i $y-1$ biti istog predznaka. 5 bodova

Stoga sistem možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} |x+y-4| &= 5, \\ |x-3|+|y-1| &= 5, \\ (x-3)(y-1) &\geq 0. \end{aligned}$$

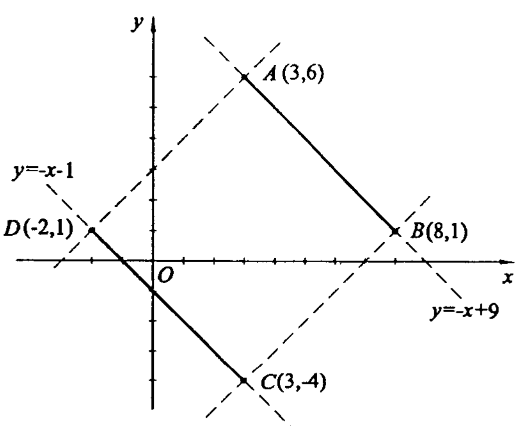
Ovaj sistem se svodi na sljedeća dva

$$\begin{aligned} |x+y-4| &= 5, \\ |x-3|+|y-1| &= 5, \\ x-3 &\geq 0, \\ y-1 &\geq 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |x+y-4| &= 5, \\ |x-3|+|y-1| &= 5, \\ x-3 &\leq 0, \\ y-1 &\leq 0, \end{aligned}$$

koja su ekvivalenta s

$$\begin{aligned} x+y &= 9, \\ x &\geq 3, \\ y &\geq 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y &= -1, \\ x &\leq 3, \\ y &\leq 1. \end{aligned}$$

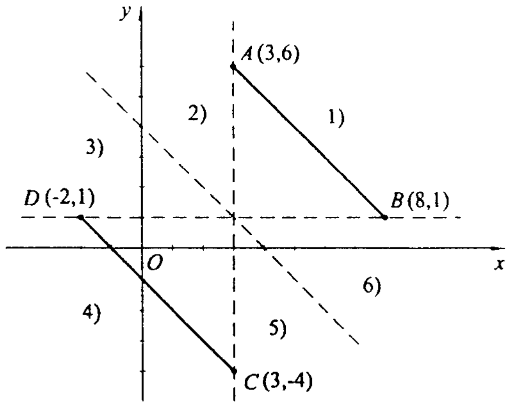
10 bodova



U prvom slučaju zadovoljavaju točke $(x, 9-x)$ za $x \in [3,8]$, tj. dio pravca $y=9-x$ unutar područja $x \geq 3$ i $y \geq 1$. 5 bodova

U drugom slučaju zadovoljavaju točke $(x, -1-x)$ za $x \in [-2,3]$, tj. dio pravca $y=-1-x$ unutar područja $x \leq 3$ i $y \leq 1$. 5 bodova

Drugo rješenje. Izrazi pod apsolutnom vrijednosti mijenjaju predznak kada je $x+y-4=0$, $x-3=0$, odnosno $y-1=0$. Ta tri pravca dijele ravninu na šest područja (vidi sliku). Na svakom od njih rješavamo sustav linearnih jednadžbi bez apsolutnih vrijednosti.



5 bodova

$$\begin{array}{lll} 1) & x+y-4=5 & \Rightarrow & x+y=9, \\ & x-3+y-1=5 & \Rightarrow & x+y=9. \end{array}$$

Rješenje je dio pravca $x+y=9$ unutar područja 1), tj. točke $(x, 9-x)$ za $3 \le x \le 8$. 4 boda

$$\begin{array}{llll} 2) & x+y-4=5 & \Rightarrow \quad x+y=9 & x=3, \\ & -x+3+y-1=5 & \Rightarrow \quad -x+y=3 & y=6. \end{array}$$

Točka $(3,6)$ već je dobivena pod 1). 3 boda

$$\begin{array}{llll} 3) & -x-y+4=5 & \Rightarrow \quad x+y=-1 & x=-2, \\ & -x+3+y-1=5 & \Rightarrow \quad -x+y=3 & y=1. \end{array}$$

Rješenje je točka $(-2,1)$. 3 boda

$$\begin{array}{lll} 4) & -x-y+4=5 & \Rightarrow \quad x+y=-1. \\ & -x+3-y+1=5 & \Rightarrow \quad x+y=-1. \end{array}$$

Rješenje je dio pravca $x+y=-1$ unutar područja 4), tj. točke $(x,-1-x)$ za $-2 \le x \le 3$. 4 boda

$$\begin{array}{llll} 5) & -x-y+4=5 & \Rightarrow \quad x+y=-1 & x=3, \\ & x-3-y+1=5 & \Rightarrow \quad x-y=7 & y=-4. \end{array}$$

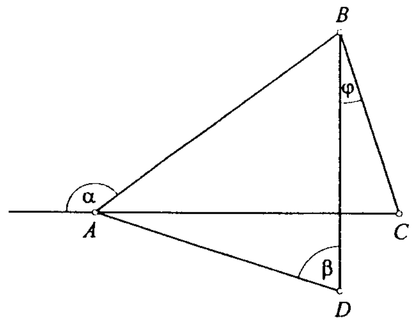
Točku $(3,-4)$ već smo dobili pod 4). 3 boda

$$\begin{array}{llll} 6) & x+y-4=5 & \Rightarrow \quad x+y=9 & x=8, \\ & x-3-y+1=5 & \Rightarrow \quad x-y=7 & y=1. \end{array}$$

Točku $(8,1)$ već smo dobili pod 1). 3 boda

3. Sa slike se vidi da je $\sphericalangle BAC = 180° - \alpha$, a kako je trokut ABC jednakokračan s bazom $\overline{BC}$,

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBA = \frac{180° - \sphericalangle BAC}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$ 8 bodova



Kako je trokut ABD jednakokračan s bazom $\overline{AB}$,

$$\sphericalangle DBA = \sphericalangle BAD = \frac{180° - \beta}{2}.$$ 8 bodova

Odavde slijedi,

$$\varphi = \sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA - \sphericalangle DBA = \frac{\alpha}{2} - \frac{180° - \beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} - 90° = 10°.$$ 9 bodova

4. *Prvo rješenje.* Najprije ćemo dani broj faktorizirati:

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 - n - 3 &= n^2(n+3) - (n+3) \\ &= (n+3)(n^2-1) \\ &= (n-1)(n+1)(n+3). \end{aligned}$$

10 bodova

Kako su brojevi $n-1$, $n+1$ i $n+3$ parni, i jedan od brojeva $n-1$ i $n+1$ je djeljiv s 4, zaključujemo da je dani broj djeljiv sa 16. 8 bodova

Ako je n djeljiv s 3, onda je i $n+3$ djeljiv s 3. Ako n nije djeljiv s 3, onda on pri dijeljenju s 3 daje ostatke 1 ili -1, pa je jedan od brojeva $n-1$ i $n+1$ djeljiv s 3. 5 bodova

Odavde zaključujemo da je dani broj djeljiv sa $16 \cdot 3 = 48$. 2 boda

Drugo rješenje. Broj n je neparan, pa ga možemo napisati u obliku $n = 2k - 1$, za neki prirodan broj k. 1 bod
Uvrstimo ovo u dani izraz:

$$(2k-1)^3 + 3(2k-1)^2 - (2k-1) - 3$$

$$= \quad 8k^3 - 8k \;=\; 8k(k^2-1) \;=\; 8k(k-1)(k+1).$$

12 bodova

Jedan od faktora $k-1$, k, $k+1$ je djeljiv s 3, 5 bodova
i bar jedan od $k-1$, k je paran. 5 bodova
Stoga je produkt djeljiv s $8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$. 2 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 2001.
2002.

II. razred

1. Neka je K polovište hipotenuze $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta ABC i M točka na kateti $\overline{BC}$, takva da je $|BM| = 2|MC|$. Dokažite da je $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MKC$.

2. Ako su a i b realni brojevi, različiti od nule, nađite sva rješenja jednadžbe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a+b+x}.$$

3. Ako je $ax^3 = by^3 = cz^3$ i $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, dokažite jednakost

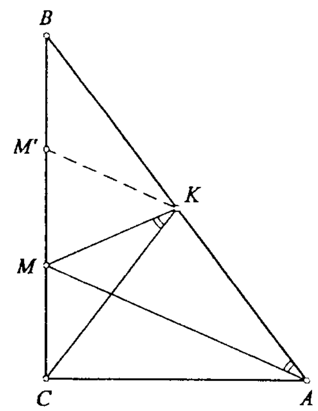
$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

4. Neka su a, b, c, d cijeli brojevi. Dokaži da je produkt razlika $b-a$, $c-a$, $d-a$, $c-b$, $d-b$, $c-d$ djeljiv s 12.

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

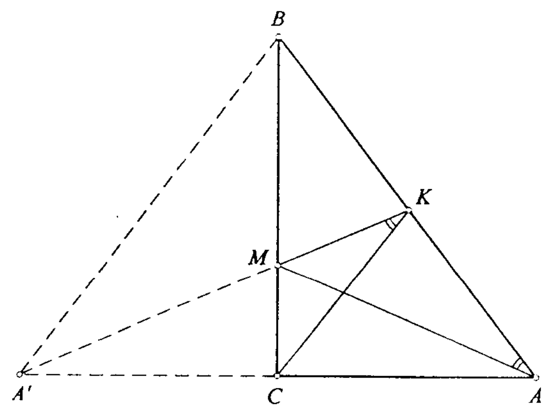
1. *Prvo rješenje.* Neka je M' točka na BC takva da je $|BM'| = |M'M| = |MC|$. Uočimo da je $\triangle MKC \cong \triangle M'KB$, pa je

$$\sphericalangle MKC = \sphericalangle M'KB.$$ 15 bodova



S druge strane je $M'K \parallel MA$ jer je $M'K$ srednjica trokuta BMA, 5 bodova
pa je $\sphericalangle M'KB = \sphericalangle MAB$. 5 bodova
(Može se reći i $\triangle MAB \sim \triangle M'KB$ s koeficijentom $\frac{1}{2}$.)

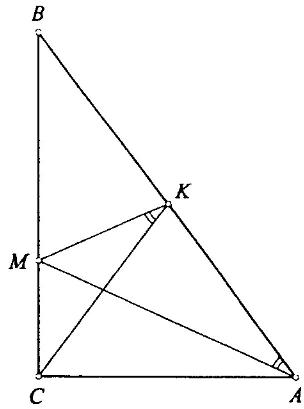
Drugo rješenje. Neka je A' točka na pravcu AC takva da je $|A'C| = |AC|$. Trokut $A'AB$ je jednakokračan s vrhom B. Stoga je $\overline{BC}$ njegova težišnica i točka M težište. Zato i težišnica $\overline{A'K}$ prolazi kroz M. 10 bodova



$\overline{CK}$ je srednjica trokuta $AA'B$, pa je $CK \parallel A'B$, te je stoga
$\sphericalangle CKM = \sphericalangle MA'B$, 5 bodova
a taj je kut zbog simetrije u odnosu na pravac BC jednak $\sphericalangle MAB$. 5 bodova
Stoga je $\sphericalangle CKM = \sphericalangle MAB$, što je i trebalo dokazati. 5 bodova

Treće rješenje. Uočimo najprije da je $|CK| = \frac{1}{2}|AB| = |BK|$, tj. trokut CBK je jednakokračan, pa je

$$\sphericalangle BCK = \sphericalangle CBK, \quad \text{tj.} \quad \sphericalangle KCM = \sphericalangle ABM.$$ 10 bodova



Nadalje,

$$\frac{|MC|}{|MB|} = \frac{1}{2} = \frac{|CK|}{|AB|}.$$ 5 bodova

Odavde slijedi da je $\triangle BMA \sim \triangle CMK$. 5 bodova
Zato je $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MKC$. 5 bodova

2. Sređivanjem ove jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)x+ab}{abx} &= \frac{1}{a+b+x}, \\ (a+b)x^2 + (a+b)^2x + (a+b)ab &= 0. \end{aligned}$$

10 bodova

Ako je $b = -a$, zadovoljava svaki $x \neq 0$. 5 bodova
Za $b \neq -a$ je

$$\begin{aligned} x^2 + (a+b)x + ab &= 0, \\ (x+a)(x+b) &= 0, \end{aligned}$$

odakle je $x \in \{-a, -b\}$. 10 bodova

3. Uz uvjete

$$ax^3 = by^3 = cz^3, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \qquad (2)$$

redom dobivamo

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} \\ &= \sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} = \sqrt[3]{ax^3} = x\sqrt[3]{a}. \end{aligned}$$

10 bodova

Zbog (1) je i $A = y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c}$, pa je

$$\sqrt[3]{a} = \frac{A}{x}, \quad \sqrt[3]{b} = \frac{A}{y}, \quad \sqrt[3]{c} = \frac{A}{z},$$ 5 bodova

odakle je

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} &= \frac{A}{x} + \frac{A}{y} + \frac{A}{z} \\ &= A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ &= A = \sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2}, \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. 10 bodova

4. Budući da je $12 = 4 \cdot 3$, dovoljno je pokazati da je produkt djeljiv s 4 i s 3. 5 bodova

Ako ima više od dva broja iste parnosti, onda su sve razlike tih brojeva parne, a ima ih barem 3. Tada je produkt djeljiv s 8. Ako su dva broja parna i dva neparna, onda su dvije njihove razlike parne i produkt je djeljiv s 4. 10 bodova

Promatrajmo ostatke pri dijeljenju četiri dana broja s 3. Sigurno postoje dva koja imaju isti ostatak. Njihova razlika je djeljiva s 3. 10 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 2001.
2002.

III. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} = \log_9 \log_9 \frac{x}{3}.$$

2. Dvije se kružnice dodiruju izvana u točki T. Jedna vanjska zajednička tangenta dodiruje te kružnice u točkama A i B, a $\overline{BC}$ je promjer kružnice na kojoj leži točka B. Dokažite da se točka T nalazi na dužini $\overline{AC}$.

3. Ako je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, dokažite sljedeći trigonometrijski identitet

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

4. Neka je H sjecište visina šiljastokutnog trokuta ABC. Dokažite da je $|BC| \cdot \operatorname{ctg} \sphericalangle CAB = |AH|$.

oprilka 2002

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Da bi jednadžba imala smisla mora biti

$$x > 0,\ \log_3 x > 0,\ \log_9 \frac{x}{3} > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0,\ x > 1,\ x > 3. \qquad \text{5 bodova}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\log_3 \frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} &= \log_3 \left(\log_9 \frac{x}{3}\right)^{1/2}, \\
\frac{1}{\sqrt{\log_3 x}} &= \sqrt{\frac{1}{2}\log_3 \frac{x}{3}} \qquad /^2, \\
\frac{1}{\log_3 x} &= \frac{1}{2}(\log_3 x - 1).
\end{aligned}$$

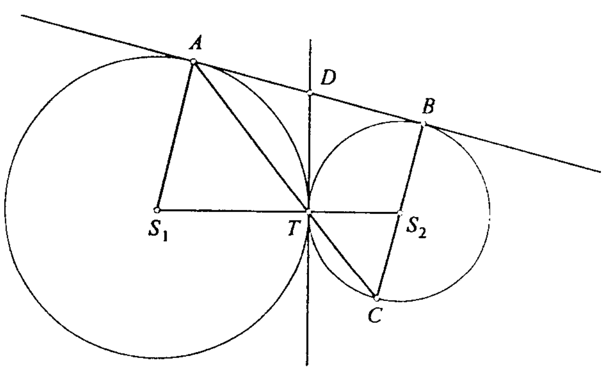
$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0. \qquad \text{15 bodova}$$

$$\log_3 x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 9.$$

$$\log_3 x = -1 \quad \text{ne zadovoljava.}$$

5 bodova

2. *Prvo rješenje.* Budući da je $\overline{BC}$ promjer kružnice, trokut BTC je pravokutan, tj. $\sphericalangle BTC = 90°$.
Dovoljno je pokazati da je $\sphericalangle ATB = 90°$. 5 bodova



Označimo s D sjecište zajedničke tangente tih dviju kružnica u točki T i dužine $\overline{AB}$. Zbog $|AD| = |DT| = |BD|$, imamo

$$\alpha = \sphericalangle DAT = \sphericalangle DTA \quad \text{i} \quad \beta = \sphericalangle DBT = \sphericalangle DTB,$$

a odavde je $\sphericalangle ATB = \alpha + \beta$. 15 bodova
Suma kutova u trokutu ATB je $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180°$, tj. $\alpha + \beta = 90°$. 5 bodova

Drugo rješenje. Trokuti AS_1T i CS_2T su jednakokračni. Kako je $\measuredangle BAS_1 = \measuredangle ABS_2 = 90°$, slijedi

$$\measuredangle AS_1S_2 + \measuredangle S_1S_2B = 180°$$

(suma kutova u četverokutu), 10 bodova
pa je

$$\measuredangle CS_2T = 180° - \measuredangle BS_2T = \measuredangle AS_1T.$$

Stoga su trokuti AS_1T i CS_2T slični, pa je i $\measuredangle ATS_1 = \measuredangle CTS_2$. 10 bodova
Odavde slijedi da su točke A, C i T kolinearne (jer su S_1, S_2 i T kolinearne). 5 bodova

3. *Prvo rješenje.*

$$\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &= (\sin\alpha + \sin\beta) + \sin(\alpha+\beta) \\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \\
&= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\pi-\gamma}{2} \\
&= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

25 bodova

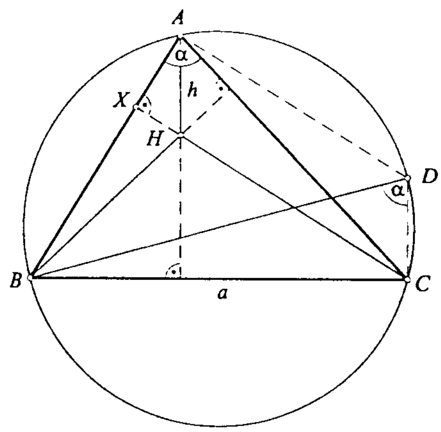
općinsko 2002.
3. razred

Drugo rješenje.

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &= \sin\alpha + \sin\beta + \sin[\pi - (\alpha+\beta)] \\
&= \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) \\
&= \sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
&= \sin\alpha(1+\cos\beta) + \sin\beta(1+\cos\alpha) \\
&= 2\sin\alpha\cos^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\beta\cos^2\frac{\alpha}{2} \\
&= 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} + 4\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} \\
&= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) \\
&= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \\
&= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) \\
&= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{25 bodova}
\end{aligned}
$$

Napomena. Mogu se dati i djelomični bodovi prema procjeni ocjenjivača.

4. *Prvo rješenje.* Koristimo oznake kao na slici. Neka je $\overline{BD}$ promjer trokutu ABC opisane kružnice. Prema Talesovom poučku je $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 90°$. Pravac CH je okomit na stranicu $\overline{AB}$ (jer je H sjecište visina trokuta ABC). Zato je $CH \parallel DA$. Iz istog razloga je $AH \parallel DC$. Zaključujemo da je četverokut $AHCD$ paralelogram, zbog čega je $|DC| = |AH|$. 15 bodova



Nadalje je $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB = \alpha$, jer su to kutovi nad istim lukom $\widehat{BC}$. Iz pravokutnog trokuta BCD imamo:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|AH|}{|BC|} = \frac{h}{a}$$

odakle je $h = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, što je i trebalo dokazati. 10 bodova

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned}
|BC| \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{|BC|\cos\alpha}{\sin\alpha} \\
&= \frac{|CX|\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta} \\
&= \frac{|AC|\cos\alpha}{\sin\beta} \\
&= \frac{|AX|}{\sin\beta} = |AH|.
\end{aligned}$$

Posljednja jednakost vrijedi jer je $\sphericalangle AHX = \sphericalangle CBA = \beta$, (kutovi s okomitim kracima). 25 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

1. ožujka ~~2001.~~
2002.

IV. razred

1. Nađite geometrijsko mjesto točaka iz kojih se na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ mogu povući dvije uzajamno okomite tangente.

2. Na krakovima šiljastog kuta α s vrhom A dane su točke D i E, tako da je $|AD| = m$ i $|AE| = n$. U točkama D i E povučene su okomice na krakove kuta na kojima leže. Ako se te dvije okomice sijeku u točki F u unutrašnjosti kuta, dokažite da je

$$\frac{|DF|}{|EF|} = \frac{n - m\cos\alpha}{m - n\cos\alpha}.$$

3. Nađite sva realna rješenja sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{2002} &= 2002\,, \\ x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2002}^4 &= x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{2002}^3\,. \end{aligned}$$

4. Prvi član aritmetičkog niza (a_n), kojem su svi članovi prirodni brojevi, je $a_1 = 1$. Broj $4 = 2^2$ jest, a 2 nije član tog niza.

a) Dokažite da postoji jedan i samo jedan takav niz. Napišite njegov opći član.

b) Pokažite da je kvadrat svakog prirodnog broja, koji nije djeljiv s 3, član tog niza.

c) Provjerite da su brojevi 2002 i 2002^2 članovi tog niza. Odredite njihove indekse.

d) Obrazložite zaključak: kvadrat svakog člana niza je član tog niza. Vrijedi li obrat, tj. ako je kvadrat nekog broja član tog niza, je li i taj broj član niza.

ožujka 2002.

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Pravac $y = kx + l$ je tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ako je $k^2a^2 + b^2 = l^2$. Njezina je jednadžba

$$y = kx + \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \qquad (1)$$ 5 bodova

Pravac $y = -\frac{1}{k}x + l_1$ je okomit na prethodni pravac i bit će tangenta na danu elipsu ako je $\frac{1}{k^2}a^2 + b^2 = l_1^2$. Njezina jednadžba je

$$y = -\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}\sqrt{a^2 + k^2b^2}. \qquad (2)$$ 5 bodova

Riješimo li sistem jednadžbi (1) i (2), dobivamo

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + k^2b^2} - k\sqrt{k^2a^2 + b^2}}{k^2 + 1}, \quad y = \frac{\sqrt{k^2a^2 + b^2} + k\sqrt{a^2 + k^2b^2}}{k^2 + 1}.$$ 8 bodova

Odavde kvadriranjem i zbrajanjem lijevih i desnih strana, dobivamo

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$ 7 bodova

Dakle tražemo geometrijsko mjesto točaka je kružnica sa središtem u ishodištu polumjera $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Drugo rješenje. Neka je (x_0, y_0) točka iz koje se na danu elipsu mogu povući dvije međusobno okomite tangente. Jedna od njih neka ima jednadžbu $y = kx + l$. Vrijedi, $y_0 = kx_0 + l$ tj. $l = y_0 - kx_0$. 5 bodova
Zbog uvjeta tangencijalnosti imamo

$$a^2k^2 + b^2 = l^2 \quad \text{tj.} \quad a^2k^2 + b^2 = (y_0 - kx_0)^2.$$

Ovo je kvadratna jednadžba po k:

$$(a^2 - x_0^2)k^2 + 2x_0y_0k + b^2 - y_0^2 = 0.$$ 5 bodova

Drugo rješenje ove jednadžbe je koeficijent smjera druge tangente iz točke (x_0, y_0) na elipsu, pa rješenja k_1 i k_2 ove kvadratne jednadžbe moraju zadovoljavati uvjet $k_1k_2 = -1$. 8 bodova
Prema Vièteovoj formuli je

$$k_1k_2 = \frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2},$$

i te će tangente na elipsu povučene iz točke (x_0, y_0) biti okomite ako je

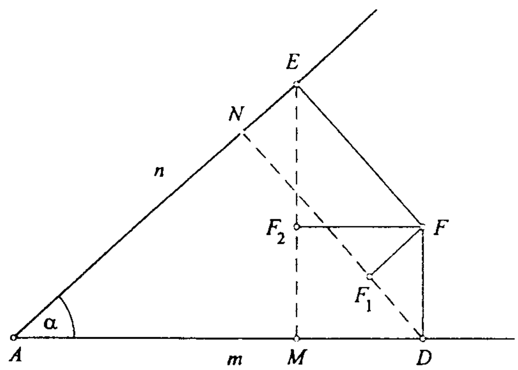
$$\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2} = -1,$$

tj. ako je $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$. 7 bodova
Točke s traženim svojstvom su točke kružnice $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

općinsko 2002.
4. razred

2. *Prvo rješenje.* Neka su M i N nožišta okomica iz E i D na krakove kuta. Iz F spustimo okomice FF_1 i FF_2 na DN i EM. Tada iz pravokutnih trokuta FF_1D i EFF_2 zbog

$$\sphericalangle FDF_1 = \sphericalangle FEF_2 = \alpha$$ 5 bodova



imamo

$$|DF| \sin\alpha = |FF_1| = |EN|,$$

$$|EF| \sin\alpha = |FF_2| = |MD|,$$

10 bodova

pa je

$$\frac{|DF|}{|EF|} = \frac{|EN|}{|MD|} = \frac{|AE| - |AN|}{|AD| - |AM|} = \frac{n - m\cos\alpha}{m - n\cos\alpha}.$$ 10 bodova

Općinsko 2002.
4. razred

3. Prvu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \ldots + (x_{2002} - 1) = 0, \qquad \text{5 bodova}$$

a drugu:

$$x_1^3(x_1 - 1) + x_2^3(x_2 - 1) + \ldots + x_{2002}^3(x_{2002} - 1) = 0. \qquad \text{5 bodova}$$

Oduzimanjem posljednjih dviju slijedi:

$$(x_1^3 - 1)(x_1 - 1) + (x_2^3 - 1)(x_2 - 1) + \ldots + (x_{2002}^3 - 1)(x_{2002} - 1) = 0$$

tj.

$$(x_1 - 1)^2(x_1^2 + x_1 + 1) + \ldots + (x_{2002} - 1)^2(x_{2002}^2 + x_{2002} + 1) = 0. \qquad \text{5 bodova}$$

Kako je za svaki realan broj x, $x^2 + x + 1 > 0$, mora biti $x_k = 1$, za $1 \leq k \leq 2002$. Lako se provjeri da je ovo zaista rješenje. 10 bodova

Napomena. Učenik koji samo uoči da je rješenje $x_1 = \ldots = x_n = 1$ dobija 5 bodova.

4. a) Svi članovi niza su prirodni brojevi, pa je i razlika d prirodan broj, i to 1, 2 ili 3 (ako je $d \geq 4$ onda je $a_2 = 1 + d \geq 5$, pa 4 ne bi bio član tog niza).
Za $d = 1$ broj 2 bi bio član niza, a za $d = 2$ broj 4 ne bi bio član niza. Ostaje samo mogućnost $d = 3$. Opći član niza je
$a_n = 1 + 3(n - 1) = 3n - 2$. 5 bodova

b) Svaki prirodan broj koji nije djeljiv s 3 je oblika $3k \pm 1$, $k \in \mathbf{N}_0$. Za kvadrat tog broja vrijedi

$$(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k + 1) - 2 = 3m - 2,$$

gdje je $m = 3k^2 \pm 2k + 1$ očito prirodan broj. Zato je $(3k \pm 1)^2$ m-ti član niza. 7 bodova

c) Iz $3n - 2 = 2002 = 3 \cdot 668 - 2$ slijedi $a_{668} = 2002$, a iz
$3n - 2 = 2002^2 = 3 \cdot 1\,336\,002 - 2$ je $a_{1\,336\,002} = 2002^2$. 5 bodova

d) Svaki se član niza može napisati u obliku

$$a_n = 3n - 2 = 3(n - 1) + 1 = 3k + 1, \ k = n - 1, \ k \in \mathbf{N}_0.$$

U b) je dokazano da je kvadrat svakog broja oblika $3k + 1$ član niza. To znači da je i broj a_n^2 član niza. 6 bodova

Obrat ne vrijedi, jer kvadrati prirodnih brojeva koji su članovi niza su oblika $(3k \pm 1)^2$, a članovi niza su (samo)
$a_n = 3n - 2 = 3k + 1$, dok brojevi oblika $3k - 1$ nisu članovi niza.
Tako, na primjer, broj $25 = 5^2 = 3 \cdot 9 - 2$ jest (deveti) član niza, a broj 5 nije član niza. 2 boda

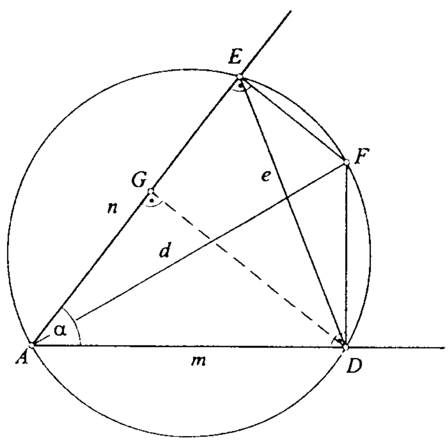
Općinsko 2002.
4. razred

Drugo rješenje. Četverokut $ADFE$ je tetivan, jer je $\sphericalangle ADF = \sphericalangle AEF = 90°$, pri čemu je $d = |AF|$ duljina promjera pripadne kružnice. Budući da je ta kružnica ujedno i kružnica opisana trokutu ADE, to je, prema poučku o sinusima, $e = |DE| = d \sin\alpha$. 5 bodova

Dalje je:

$$
\begin{aligned}
|DF|^2 &= d^2 - m^2 = \frac{e^2}{\sin^2\alpha} - m^2 = \frac{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - m^2 \\
&= \frac{m^2(1-\sin^2\alpha) + n^2 - 2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
&= \frac{m^2\cos^2\alpha + n^2 - 2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
&= \frac{(n - m\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad |DF| = \left|\frac{n - m\cos\alpha}{\sin\alpha}\right|.
\end{aligned}
$$

10 bodova



Ako je G nožište okomice iz točke D na drugi krak kuta. Tada je $|AG| < |AE|$, ili $m\cos\alpha < n$. Isto tako je $\sin\alpha > 0$. Zbog svega toga je

$$|DF| = \frac{n - m\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Potpuno istim računom se dobije

$$|EF| = \frac{m - n\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

8 bodova

Konačno je

$$\frac{|DF|}{|EF|} = \frac{n - m\cos\alpha}{m - n\cos\alpha}.$$

2 bodova