MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Općinsko - gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 2002. godine

Zadaci za 5. razred

1. Izračunaj

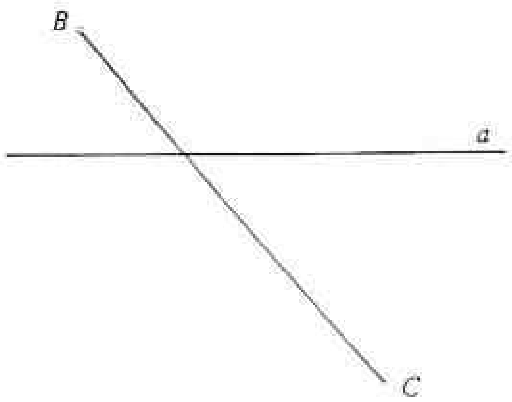
$$4\,253 - 53 \cdot (24\,491 - 9\,558 : 27 \cdot 69) + 14 \cdot 527 - 527 \cdot 4 \ .$$

2. Na stolu se nalaze dvije hrpe Pokemon sličica, pri čemu prva hrpa sadrži 54 sličice više nego druga. Uzmemo li sa svake od hrpa po 18 sličica, u prvoj će hrpi ostati četiri puta više sličica nego u drugoj.
   Koliko se sličica na početku nalazilo u svakoj od hrpa?

3. Kojim najmanjim prirodnim brojem treba podijeliti brojeve 956, 1 452 i 868 da se dobiju redom ostaci 11, 12 i 13?

4. Odredi sve četveroznamenkaste višekratnike broja 36 kojima je znamenka desetica jednaka 5 i kojima su sve znamenke međusobno različite.

5. Zadan je pravac a i osnovica $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC, kao na slici, pri čemu pravci a i BC nisu međusobno okomiti i pravac a ne prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$. Konstruiraj trokut $A'B'C'$ koji je osnosimetričan trokutu ABC ako je pravac a os simetrije i poznato je da točka A' pripada pravcu a.



RJEŠENJA ZADATAKA ZA 5. RAZRED

2002. OPĆ.

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE JE DAN JEDAN OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. Računamo redom:

$$4\,253 - 53 \cdot (24\,491 - 9\,558 : 27 \cdot 69) + 14 \cdot 527 - 527 \cdot 4$$
$$= 4\,253 - 53 \cdot (24\,491 - 354 \cdot 69) + 14 \cdot 527 - 4 \cdot 527$$ 2 BODA
$$= 4\,253 - 53 \cdot (24\,491 - 24\,426) + (14 - 4) \cdot 527$$ 2 BODA
$$= 4\,253 - 53 \cdot 65 + 10 \cdot 527$$ 2 BODA
$$= 4\,253 - 3\,445 + 5\,270$$ 2 BODA
$$= 808 + 5\,270$$ 1 BOD
$$= 6\,078\,.$$ 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Razlika broja sličica u prvoj i drugoj hrpi na početku je iznosila 54. Ona se neće promijeniti izvadimo li iz svake od hrpa po 18 sličica, što znači da će se i nakon toga u prvoj hrpi nalaziti 54 sličice više nego u drugoj. 3 BODA

Prema uvjetima zadatka, u prvoj se hrpi tada nalazi četiri puta više sličica nego u drugoj pa je razlika broja sličica u prvoj i drugoj hrpi jednaka trostrukom broju sličica u drugoj hrpi. 3 BODA

Prema tome, u drugoj se hrpi nalazi $54 : 3 = 18$ sličica, a u prvoj četiri puta više, tj. $4 \cdot 18 = 72$ sličice. 2 BODA

Dakle, prije no što smo iz svake hrpe izvadili po 18 sličica, u prvoj se hrpi nalazilo $72 + 18 = 90$, dok je u drugoj hrpi bilo $18 + 18 = 36$ sličica. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. 1. način. Prema tekstu zadatka, broj 956 pri dijeljenju traženim brojem daje ostatak 11. Zato traženi broj dijeli broj $956 - 11 = 945$. 2 BODA

Na sličan način zaključujemo da traženi broj dijeli i brojeve $1\,452 - 12 = 1\,440$, te $868 - 13 = 855$. 1 BOD

Prema tome, traženi broj dijeli sva tri broja 945, 1 440 i 855, pa je on njihov zajednički djelitelj. 1 BOD

S druge strane, budući da dijeljenje brojeva 956, 1 452 i 868 traženim brojem daje ostatke 11, 12 i 13, taj broj mora biti veći od najvećeg ostatka, tj. od broja 13. 1 BOD

Dakle, traženi broj je najmanji zajednički djelitelj brojeva 945, 1 440 i 855 koji je veći od 13. 1 BOD

Rastavljanjem na proste faktore dobijemo $945 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1\,440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ i $855 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$. 3 BODA

Odavde zaključujemo da su svi zajednički djelitelji brojeva 945, 1 440 i 855 redom 1, 3, 5, 7, 9, 15 i 45. Sada je jasno da je broj 15 traženi broj. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. način. Budući da su ostaci pri dijeljenju brojeva 956, 1452 i 868 traženim brojem redom 11, 12 i 13, zaključujemo da je traženi broj nužno veći od 13, tj. najmanje 14. 3 BODA

S obzirom da tražimo najmanji broj s opisanim svojstvom, provjeravamo redom daju li brojevi 14, 15, 16, 17 ... tražene ostatke. Najmanji od njih s tim svojstvom traženi je broj. 3 BODA

Prvo računamo ostatke pri dijeljenju brojeva 956, 1 452 i 868 s 14. Dobijemo $956 = 68 \cdot 14 + 4$, $1\,452 = 103 \cdot 14 + 10$ i $868 = 62 \cdot 14$, pa 14 očito nije traženi broj. 2 BODA

No, kako je $956 = 63 \cdot 15 + 11$, $1\,452 = 96 \cdot 15 + 12$ i $868 = 57 \cdot 15 + 13$, zaključujemo da je traženi broj 15. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Tražimo četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{ab5d}$ kojima su znamenke a, b, 5 i d međusobno različite, a među svim takvim brojevima zanimaju nas višekratnici broja 36, tj. brojevi djeljivi s $36 = 4 \cdot 9$. 1 BOD

Budući da su brojevi 4 i 9 relativno prosti, broj će biti djeljiv s 36 jedino ako je djeljiv i sa 4 i sa 9. 1 BOD

Iz činjenice da je broj djeljiv sa 4 samo ako je njegov dvoznamenkasti završetak djeljiv sa 4 slijedi da broj $\overline{5d}$ mora biti djeljiv sa 4, što znači da je $d = 2$ ili $d = 6$. 2 BODA

Prema tome, tražimo četveroznamenkaste brojeve oblika $\overline{ab52}$ ili $\overline{ab56}$, s međusobno različitim znamenkama, koji su djeljivi s 9, odnosno kojima je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Broj oblika $\overline{ab52}$ bit će djeljiv s 9 ako je zbroj njegovih znamenki $a + b + 5 + 2$, tj. $a + b + 7$ djeljiv s 9. No, kako su a i b znamenke te $a \neq 0$, zbroj $a + b$ može poprimiti jedino vrijednosti $1, 2, 3, \ldots, 18$, odakle slijedi da je $a + b = 2$ ili $a + b = 11$. 1 BOD

Jedini četveroznamenkasti brojevi oblika $\overline{ab52}$ za koje je $a + b = 2$ su 2 052 i 1 152, od kojih niti jedan nije rješenje zadatka (nema međusobno različite znamenke). 1 BOD

Četveroznamenkasti brojevi oblika $\overline{ab52}$ za koje je $a+b=11$ su 9 252, 8 352, 7 452, 6 552, 5 652, 4 752, 3 852 i 2 952, među kojima različite znamenke imaju samo 3 852, 4 752, 7 452 i 8 352. 1 BOD

Analogno postupimo i za brojeve oblika $\overline{ab56}$. Tu je $a+b+5+6$, tj. $a+b+11$ djeljivo s 9, pa opet razlikujemo dv. slučaja: $a+b=7$ ili $a+b=16$. 1 BOD

Uvjet $a+b=7$ zadovoljavaju brojevi 7 056, 6 156, 5 256, 4 356, 3 456, 2 556 i 1 656, od kojih jedino 3 456, 4 356 i 70 imaju međusobno različite znamenke. 1 BOD

Konačno, uvjet $a+b=16$ ispunjavaju jedino brojevi 9 756, 8 856 i 7 956, od kojih su rješenja zadatka samo 7 956 i 9 756. 1 BOD

Dakle, zadatak ima 9 rješenja, i to su brojevi 3 456, 3 852, 4 356, 4 752, 7 056, 7 452, 7 956, 8 352 i 9 756.

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Analiza. Pri osnoj simetriji, kojoj je os pravac a, točka A preslikala se u točku A', točka B u točku B', a točka C u točku C'. Također, točke pravca a pritom se preslikaju u same sebe i to su jedine točke s tim svojstvom. Budući da točka A' leži na pravcu a, zaključujemo da je $A'=A$. 2 BODA

Nadalje, trokut ABC je jednakokračan, s osnovicom $\overline{BC}$. To znači da je treći vrh tog trokuta, tj. točka A, jednako udaljena od točaka B i C pa leži na simetrali s dužine $\overline{BC}$. Dakle, točka A (tj. A') je presjek pravaca s i a. 2 BODA

Konstrukcija. Prvo konstruiramo simetralu s dužine $\overline{BC}$ i odredimo točku $A=A'$ kao presjek osi simetrije a i simetrale s. 3 BODA

Zatim konstruiramo redom osnosimetrične slike B' i C' točaka B i C s obzirom na pravac a. 2 BODA

Na kraju, vrhove A', B' i C' spojimo dužinama. 1 BOD

Dokaz konstrukcije. Da konstruirani trokut zadovoljava uvjete zadatka vidljivo je iz analize.

Rasprava. Uočimo da se pravci s i a uistinu sijeku u jednoj točki $A \notin \overline{BC}$ jer pravac BC nije okomit na a i ne prolazi polovištem dužine $\overline{BC}$. Dakle, točka A, pa time i trokuti ABC te $A'B'C'$, jedinstveni su.

Napomena. Od učenika se očekuje i konstrukcija i objašnjenje postupka (analiza). Sama konstrukcija bez objašnjenja nosi samo 6 bodova. Dokaz konstrukcije i provođenje rasprave o broju rješenja od učenika se ne očekuju.

.... UKUPNO 10 BODOVA