MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 2002. godine

Zadaci za 6. razred

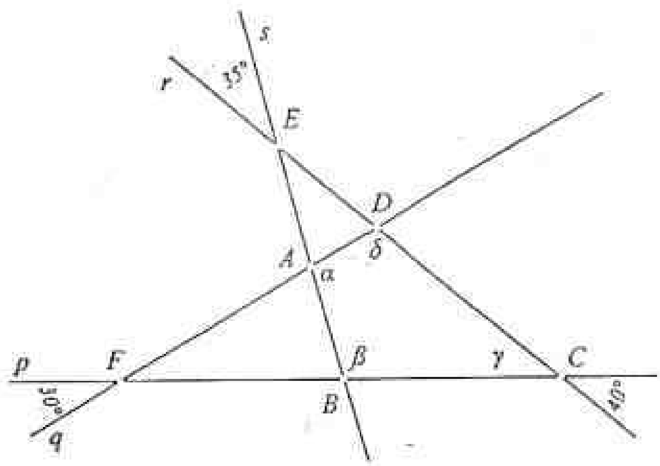
1. Izračunaj

$$\frac{\left(1\frac{3}{4}:\frac{2}{3}-1.75\cdot 1.125\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{13}{40}-0.2125\right)\cdot 400}\cdot(6.79:0.7+0.3) .$$

2. Marko je pješice krenuo od mjesta A do mjesta B. Nakon što je prešao 1 km i polovinu ostatka puta, preostala mu je trećina cijelog puta i još 1 km hoda. Kolika je udaljenost mjesta A i mjesta B?

3. U 14 kutija raspoređeno je 25 kuglica, tako da svaka od kutija sadrži jednu, dvije ili tri kuglice. Broj kutija koje sadrže točno jednu kuglicu veći je od 6. Ukupni broj kuglica koje se nalaze u kutijama koje sadrže više od jedne kuglice veći je od 17.
Koliko kutija sadrži točno jednu kuglicu, koliko točno dvije kuglice, a koliko ih sadrži tri kuglice?

4. Pravci p, q, r i s sijeku se u točkama A, B, C, D, E i F, kao na slici, gdje su upisane poznate veličine kutova. Izračunaj veličine kutova α, β, γ i δ.



5. Dana je dužina $\overline{AD}$. Na njoj su odabrane točke B i C tako da je $|AB|=|BC|=|CD|$. Nad dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$ s iste strane pravca AD nacrtani su jednakostranični trokuti ACF i CDE. Dokaži da je trokut BEF jednakostraničan.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 6. RAZRED

OPĆ 2002.

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE JE DAN JEDAN OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. Izračunajmo najprije vrijednost razlomka, tako da izračunamo vrijednost njegovog brojnika i nazivnika. Za izraz u brojniku vrijedi redom:

$$1\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{8}, \qquad \text{1 BOD}$$

$$1.75\cdot 1.125=\frac{7}{4}\cdot\frac{9}{8}=\frac{63}{32}, \qquad \text{1 BOD}$$

te

$$\left(1\frac{3}{4}:\frac{2}{3}-1.75\cdot 1.125\right):\frac{7}{12}=\left(\frac{21}{8}-\frac{63}{32}\right):\frac{7}{12}=\frac{21}{32}:\frac{7}{12} \qquad \text{1 BOD}$$

$$=\frac{21}{32}\cdot\frac{12}{7}=\frac{9}{8}, \qquad \text{1 BOD}$$

dok je vrijednost izraza u nazivniku:

$$\left(\frac{13}{40}-0.2125\right)\cdot 400=0.1125\cdot 400 \qquad \text{1 BOD}$$

$$=45. \qquad \text{1 BOD}$$

Vrijednost razlomka zato je

$$\frac{\left(1\frac{3}{4}:\frac{2}{3}-1.75\cdot 1.125\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{13}{40}-0.2125\right)\cdot 400}=\frac{\frac{9}{8}}{45}=\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{45}=\frac{1}{40}. \qquad \text{1 BOD}$$

Zbog

$$6.79:0.7+0.3=9.7+0.3 \qquad \text{1 BOD}$$

$$=10 \qquad \text{1 BOD}$$

konačno imamo

$$\frac{\left(1\frac{3}{4}:\frac{2}{3}-1.75\cdot 1.125\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{13}{40}-0.2125\right)\cdot 400}\cdot(6.79:0.7+0.3)=\frac{1}{40}\cdot 10=\frac{1}{4}=0.25. \qquad \text{1 BOD}$$

Napomena. Kao konačan rezultat jednako se boduju oba zapisa $\frac{1}{4}$ i 0.25.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Nakon što je prešao 1 km i $\frac{1}{2}$ ostatka puta, Marku je za pješačenje preostala još $\frac{1}{2}$ ostatka puta od mjesta A do mjesta B.
2 BODA

No, kako mu je prema uvjetima zadatka za pješačenje ostala $\frac{1}{3}$ cijelog puta i još 1 km hoda, zaključujemo da je duljina $\frac{1}{2}$ ostatka puta jednaka 1 km uvećanom za duljinu $\frac{1}{3}$ cijelog puta.
1 BOD

Budući da je cijeli ostatak puta dvostruko duži od svoje polovine, slijedi da njegova duljina iznosi 2 km uvećanom za $\frac{2}{3}$ duljine cijelog puta.
3 BODA

Prema tome, put od mjesta A do mjesta B možemo podijeliti u tri dionice: prva je dionica duga 1 km, zatim slijedi dionica čija duljina iznosi $\frac{2}{3}$ duljine cijelog puta, a put završava dionicom dugom 2 km. Zato $\frac{1}{3}$ udaljenosti od mjesta A do mjesta B iznosi $1+2=3$ km.
3 BODA

Sada je jasno da je udaljenost od mjesta A do mjesta B trostruko tolika, tj. iznosi $3\cdot 3=9$ km.
1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Označimo kutije koje sadrže točno jednu kuglicu oznakom A, kutije koje sadrže točno dvije kuglice oznakom B, a one koje sadrže tri kuglice oznakom C. Broj kutija tipa A veći je ili jednak od 7, što znači da je u takvim kutijama raspoređeno najmanje 7 kuglica, odakle slijedi da je u kutijama tipa B i C raspoređeno najviše 18 kuglica. S druge strane, prema pretpostavci zadatka, u kutijama tipa B i C raspoređeno je najmanje 18 kuglica.
1 BOD

No, kako je ukupni broj kuglica jednak $25=7+18$, to je moguće jedino ako je u kutije tipa A raspoređeno točno 7 kuglica, a u ostale kutije (tipa B i C) točno 18 kuglica.
2 BODA

Prema tome, kutija tipa A ima 7, što znači da i kutija tipa B i C ima ukupno $14-7=7$.
1 BOD

To je moguće u ovih 8 slučajeva:

Broj kutija tipa B	7	6	5	4	3	2	1	0
Broj kutija tipa C	0	1	2	3	4	5	6	7

2 BODA

Kada bi bilo 7 kutija tipa B i nijedna kutija tipa C, u njima bi se nalazilo ukupno $7\cdot 2+0\cdot 3=14$ kuglica, što je u suprotnosti s činjenicom da je ukupni broj kuglica u kutijama tipa B i C jednak 18. Nadalje, kada bi bilo 6 kutija tipa B i samo jedna kutija tipa C, u njima bi bilo $6\cdot 2+1\cdot 3=15$ kuglica, što opet nije istinito. Analogno izračunamo broj kuglica i u ostalim slučajevima, što prikazujemo dodavanjem još jednog retka u tablici:

Broj kutija tipa B	7	6	5	4	3	2	1	0
Broj kutija tipa C	0	1	2	3	4	5	6	7
Ukupno kuglica u B i C	$7\cdot 2+0\cdot 3=14$	$6\cdot 2+1\cdot 3=15$	$5\cdot 2+2\cdot 3=16$	$4\cdot 2+3\cdot 3=17$	$3\cdot 2+4\cdot 3=18$	$2\cdot 2+5\cdot 3=19$	$1\cdot 2+6\cdot 3=20$	$0\cdot 2+7\cdot 3=21$

3 BODA

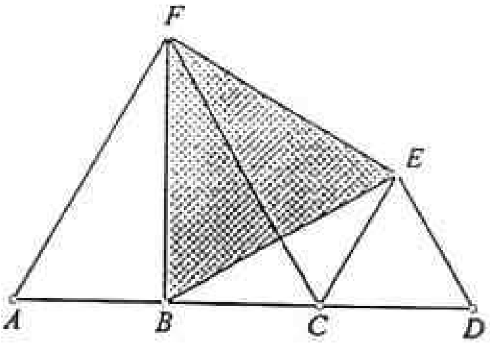
Odavde slijedi da kutija tipa B i C ima redom 3 i 4.
Dakle, ima 7 kutija s točno jednom kuglicom, 3 kutije s točno dvije kuglice i 4 kutije s tri kuglice. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Budući da vršni kutovi imaju jednake veličine, sa slike odmah čitamo: $\gamma=40°$ (vršni kutovi s vrhom C), 1 BOD
$\measuredangle DFC=30°$ (vršni kutovi s vrhom F) i $\measuredangle BEC=35°$ (vršni kutovi s vrhom E). 1 BOD
Dalje koristimo činjenicu da zbroj veličina unutarnjih kutova u svakom trokutu iznosi $180°$. Primijenimo li to na trokut FCD, dobijemo $\measuredangle DFC+\gamma+\delta=180°$, odakle je $\delta=180°-\measuredangle DFC-\gamma=180°-30°-40°=110°$. 2 BODA
Analogno, u trokutu BCE je $\beta+\gamma+\measuredangle BEC=180°$, tj. $\beta=180°-\gamma-\measuredangle BEC=180°-40°-35°=105°$. 2 BODA
Nadalje, kutovi $\delta=\measuredangle ADC$ i $\measuredangle ADE$ su sukuti, te je $\measuredangle ADE=180°-\delta=180°-110°=70°$. 2 BODA
Os[illegible]odrediti još samo kut $\alpha=\measuredangle BAD$. On je vanjski kut kod vrha A trokuta ADE pa za njega vrijedi relacija α [illegible] $AED+\measuredangle ADE=\measuredangle BEC+\measuredangle ADE=35°+70°=105°$. 2 BODA
Prema tome, $\alpha=\beta=105°$, $\gamma=40°$ i $\delta=110°$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Skica 1 BOD

Odmah uočavamo da je $|AC|=|AF|=|FC|=|BD|$ i $|AB|=|BC|=|CD|=|DE|=|CE|$. 1 BOD
Iz toga slijedi da je pravac BF simetrala dužine $\overline{AC}$ (točke B i F jednako su udaljene od krajeva A i C dužine $\overline{AC}$), pa je $BF\perp AC$, tj. $\measuredangle CBF=\measuredangle ABF=90°$. 1 BOD
Prema tome, trokut ABF je pravokutan, s kutovima $\measuredangle FAB=\measuredangle FAC=60°$ (trokut ACF je jednakostraničan) i $\measuredangle AFB=30°$. 1 BOD
No, iz $|BD|=|AF|$, $|AB|=|DE|$ i $\measuredangle FAB=\measuredangle BDE=\measuredangle CDE=60°$ (trokut CDE je jednakostraničan) slijedi da je $\triangle ABF\cong\triangle DEB$ (poučak S – K – S). 2 BODA
Zato je $|BF|=|BE|$, te je trokut BEF jednakokračan. 2 BODA
Iz dokazane sukladnosti slijedi i da je $\measuredangle DBE=\measuredangle AFB=30°$, pa je $\measuredangle FBE=\measuredangle FBC-\measuredangle DBE=90°-30°=60°$.
Dakle, trokut BEF je jednakokračan, s kutom od $60°$ između krakova, te je on jednakostraničan. 2 BODA

Napomena. Nakon dokaza sukladnosti trokuta ABF i DEB analogno se mogla dokazati i sukladnost trokuta ABF i CEF ($|FC|=|AF|$, $|CE|=|AB|$, $\measuredangle FCE=180°-\measuredangle ACF-\measuredangle DCE=180°-60°-60°=60°=\measuredangle FAB$), odakle je $|EF|=|BF|$, te je $|BF|=|BE|=|EF|$, tj. trokut BEF je jednakostraničan.
Ovakav nastavak dokaza boduje se s 4 boda.

.... UKUPNO 10 BODOVA