MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 2002. godine

Zadaci za 7. razred

1. Izračunaj

$$\frac{\left(1.2 : 36 + 1\frac{1}{5} : 0.25 - 1\frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{1}{4}}{[(7 - 6.35) : 6.5 + 9.9] \cdot \frac{1}{12.8}} : 0.125 \ .$$

2. Ukupni broj dječaka u jednom odjeljenju sedmog razreda jednak je 60% ukupnog broja djevojčica u tom odjeljenju. Koliki postotak ukupnog broja svih učenika u tom odjeljenju čine dječaci?

3. Jedne su večeri u plesnoj školi bile djevojke i mladići, ukupno njih 26-toro. Prva je djevojka plesala s 9 mladića, druga s 10, treća s 11, a svaka je sljedeća djevojka plesala s jednim mladićem više od prethodne – sve do posljednje prisutne djevojke, koja je plesala sa svakim prisutnim mladićem. Koliko je djevojaka, a koliko mladića te večeri bilo u plesnoj školi?

4. Koliko stranica ima konveksni mnogokut kojemu su svi unutarnji kutovi međusobno jednaki, ako je zbroj svih vanjskih kutova tog mnogokuta i dva njegova unutarnja kuta jednak 672°?

5. Dan je trokut ABC tako da je $\sphericalangle BAC = 68°$ i $\sphericalangle ABC = 32°$. Neka je točka D nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, a točka P polovište stranice $\overline{AB}$ tog trokuta. Na produžetku visine $\overline{CD}$ preko točke D odabrana je točka M tako da je $|MD| = |CD|$, a na produžetku dužine $\overline{CP}$ preko točke P odabrana je točka N tako da je $|NP| = |CP|$. Kolika je veličina kuta $\sphericalangle MBN$?

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 7. RAZRED

OPĆ. 2002.

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE SU DANI NEKI OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. Prvo ćemo izračunati vrijednost razlomka. Za brojnik vrijedi:

$$1.2 : 36 = \frac{12}{10} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{30},$$ 1 BOD

$$1\frac{1}{5} : 0.25 = \frac{6}{5} : \frac{1}{4} = \frac{6}{5} \cdot 4 = \frac{24}{5}.$$ 1 BOD

Vrijednost izraza u zagradi u brojniku sada je

$$1.2 : 36 + 1\frac{1}{5} : 0.25 - 1\frac{5}{6} = \frac{1}{30} + \frac{24}{5} - \frac{11}{6} = 3,$$ 1 BOD

pa je vrijednost brojnika

$$\left(1.2 : 36 + 1\frac{1}{5} : 0.25 - 1\frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{4}.$$ 1 BOD

Analogno postupamo i pri računanju vrijednosti nazivnika. Imamo redom:

$$[(7 - 6.35) : 6.5 + 9.9] \cdot \frac{1}{12.8} = (0.65 : 6.5 + 9.9) \cdot \frac{1}{12.8}$$ 1 BOD

$$= (0.1 + 9.9) \cdot \frac{1}{12.8}$$ 1 BOD

$$= 10 \cdot \frac{1}{12.8}$$ 1 BOD

$$= 10 : \frac{128}{10} = 10 \cdot \frac{10}{128} = \frac{25}{32}.$$ 1 BOD

Konačno, vrijednost razlomka je

$$\frac{\frac{15}{4}}{\frac{25}{32}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{32}{25} = \frac{24}{5}$$ 1 BOD

pa vrijedi

$$\frac{\left(1.2 : 36 + 1\frac{1}{5} : 0.25 - 1\frac{5}{6}\right) \cdot 1\frac{1}{4}}{[(7 - 6.35) : 6.5 + 9.9] \cdot \frac{1}{12.8}} : 0.125 = \frac{24}{5} : \frac{1}{8} = \frac{24}{5} \cdot 8 = \frac{192}{5} = \frac{384}{10} = 38.4.$$ 1 BOD

Napomena. Kao konačni rezultat jednako se boduje i $\frac{192}{5}$ i 38.4.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. 1. način. Označimo broj djevojčica u odjeljenju sa x. Prema tekstu zadatka, broj dječaka u tom odjeljenju jednak je 60% broja djevojčica, tj. $\frac{60}{100}x$, odnosno $\frac{3}{5}x$. 2 BODA

Prema tome, u tom odjeljenju ima ukupno $x + \frac{3}{5}x = \frac{8}{5}x$ učenika. 2 BODA

Budući da je $\left(\frac{3}{5}x\right) : \left(\frac{8}{5}x\right) = \frac{3}{8}$, tj. $\frac{3}{5}x = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{5}x$, 2 BODA

dječaci čine $\frac{3}{8}$ ukupnog broja učenika u odjeljenju, 2 BODA

te je njihov postotak $\frac{3}{8} \cdot 100\% = \frac{75}{2}\% = 37.5\%$. 2 BODA

Dakle, u danom odjeljenju 7. razreda dječaci čine 37.5% ukupnog broja učenika.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. način. Zadatak možemo riješiti i grafički. Neka duljina dužine $\overline{AB}$ na pravcu predstavlja ukupni broj djevojčica u danom odjeljenju. Budući da broj dječaka u tom odjeljenju iznosi $60\% = \frac{3}{5}$ broja djevojčica, 2 BODA

dužinu $\overline{AB}$ podijelimo na 5 jednakih dijelova (jediničnih dužina) i od točke B udesno na pravac nanesimo dužinu $\overline{BC}$ čija je duljina jednaka $\frac{3}{5}|AB|$, tj. nanesimo 3 jedinične dužine, kao na slici. 2 BODA

Ukupni broj učenika u odjeljenju tada je jednak duljini dužine $\overline{AC}$, $|AC|$. 2 BODA

Sa slike vidimo da duljina $|AC|$ iznosi 8 jediničnih duljina, a da na dječake otpadaju 3 jedinične duljine, iz čega zaključujemo da dječaci čine $\frac{3}{8} = 0.375$ odjeljenja, 2 BODA tj. 37.5% ukupnog broja učenika u tom odjeljenju 7. razreda. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. 1. način. Neka je x broj djevojaka koje su te večeri bile u plesnoj školi. Prva od njih plesala je s $9 = 8 + 1$ mladića, druga s $10 = 8 + 2$ mladića, treća s $11 = 8 + 3$ mladića itd. Iz toga zaključujemo da je posljednja, tj. x-ta djevojka plesala s $8 + x$ mladića. 3 BODA

U plesnoj školi bilo je ukupno 26 mladih (i svi su plesali), odakle dobivamo jednadžbu $x + (8 + x) = 26$. 3 BODA

Njeno je rješenje $x = 9$. 2 BODA

Dakle, u plesnoj školi bilo je 9 djevojaka i $26 - 9$, tj. 17 mladića. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. način. Zadatak se može riješiti i metodom uzastopnog približavanja. Da je u plesnoj školi bila samo jedna djevojka, plesala bi sa svim mladićima, njih 9, što bi značilo da je u plesnoj školi ukupno $1 + 9 = 10$ mladih. No, kako to nije istina (bilo je 26 mladih), u plesnoj školi bile su bar dvije djevojke. 1 BOD

Da su bile točno dvije, prva bi plesala s 9, a druga sa svih 10 mladića, pa bi u plesnoj školi bilo $2 + 10 = 12$ mladih, što nije točno. Dakle, u plesnoj školi bile su bar tri djevojke. 2 BODA

Nastavimo li postupak na isti način, zaključujemo da svaka djevojka više znači i jednog mladića više. 2 BODA

Prikažimo tablicom ovisnost broja mladića i ukupnog broja mladih u plesnoj školi o broju djevojaka:

DJEVOJKE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
MLADIĆI	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
UKUPNO	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	...

3 BODA

Budući da je u plesnoj školi bilo 26 mladih, iz tablice čitamo da je od toga bilo 9 djevojaka i 17 mladića. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Označimo sa n broj stranica (tj. vrhova ili kutova) danog mnogokuta. Uočimo najprije da je zbroj vanjskih kutova mnogokuta jednak $360°$. Zaista, vanjski i unutarnji kut kod svakog vrha mnogokuta su sukuti, tj. njihov zbroj iznosi $180°$. Zato zbroj svih unutarnjih i vanjskih kutova tog mnogokuta iznosi $n \cdot 180°$. Budući da je zbroj svih unutarnjih kutova jednak $(n-2) \cdot 180°$, zbroj svih vanjskih kutova iznosi $n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$. 2 BODA

Prema uvjetu zadatka, zbroj dva unutarnja kuta tog mnogokuta zato iznosi $672° - 360° = 312°$, 2 BODA

pa je veličina jednog jednaka $312° : 2 = 156°$. 2 BODA

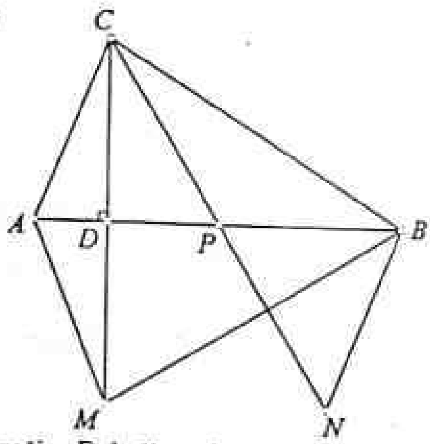
Prema poznatoj formuli zato je $\frac{(n-2) \cdot 180}{n} = 156$, 2 BODA

tj. $(n-2) \cdot 180 = 156n$, i dalje redom: $180n - 360 = 156n$, $180n - 156n = 360$, $24n = 360$, tj. $n = 15$. Dakle, traženi mnogokut ima 15 stranica. 2 BODA

Napomena. Činjenicu da je zbroj vanjskih kutova u mnogokutu jednak $360°$ učenik ne mora dokazati, već samo iskazati, što se boduje s 2 boda.

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



1. način. Skica 1 BOD

Iz teksta zadatka jasno je da se dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CN}$ međusobno raspolavljaju, 1 BOD

pa je četverokut $ANBC$ paralelogram (dijagonale mu se međusobno raspolavljaju). 2 BODA

Zato je $\measuredangle ABN = \measuredangle BAC = 68°$. 2 BODA

Nadalje, kut $\measuredangle MBA$ osnosimetrična je slika kuta $\measuredangle ABC$ s obzirom na pravac AB kao os simetrije, 1 BOD

te je $\measuredangle MBA = \measuredangle ABC = 32°$. 1 BOD

Konačno, $\measuredangle MBN = \measuredangle ABN - \measuredangle MBA = 68° - 32° = 36°$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. način. Dokažimo da je $\triangle DBM \cong \triangle DBC$. To slijedi primjenom poučka S – K – S, budući da je $\overline{DB}$ zajednička stranica ta dva trokuta, $|CD| = |MD|$ po pretpostavci, a $\measuredangle CDB = \measuredangle BDM = 90°$ zbog $CM \perp AB$. 2 BODA

Odavde slijedi i jednakost odgovarajućih kutova u trokutima DBM i DBC, te je $\measuredangle DBM = \measuredangle DBC = \measuredangle ABC = 32°$. 1 BOD

Dokažimo da je i $\triangle APC \cong \triangle BPN$. Točka P je polovište stranice $\overline{AB}$ te je $|AP| = |PB|$. Prema uvjetima zadatka također je i $|CP| = |PN|$, a vrijedi i jednakost $\measuredangle APC = \measuredangle BPN$ jer su to vršni kutovi. Sukladnost trokuta APC i BPN sada slijedi po poučku S – K – S. 2 BODA

Odavde je $\measuredangle PBN = \measuredangle PAC = \measuredangle BAC = 68°$. 1 BOD

Konačno, $\measuredangle MBN = \measuredangle PBN - \measuredangle PBM = \measuredangle PBN - \measuredangle DBM = 68° - 32° = 36°$. Dakle, $\measuredangle MBN = 36°$. 3 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA