MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Općinsko - gradsko natjecanje učenika osnovnih škola Republike Hrvatske

1. ožujka 2002. godine

Zadaci za 8. razred

1. Izračunaj

$$\frac{\left[\left(5.2^2 : 2.6 + 8.1\right)^2 - 6.5^2\right] : 0.025}{(60.192 : 2.4 - 1.08)^2 - 0.24 \cdot 1400} : 0.125 \ .$$

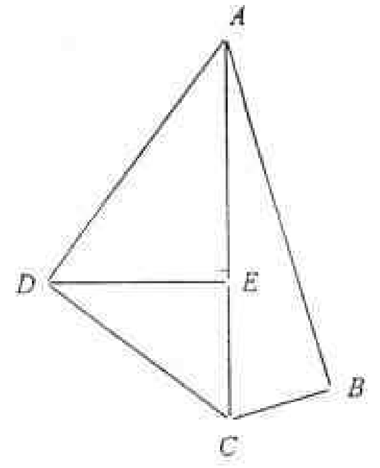
2. Za koje vrijednosti parametra a jednadžba

$$(3x - a)^2 + (4x + 1)^2 = (5x - 1)^2$$

ima rješenje, a za koje nema?

3. Na istoj obali rijeke nalaze se dva mjesta, A i B, međusobno udaljena 80 km. Riječni brod udaljenost od mjesta A do mjesta B i natrag do mjesta A prijeđe za 8 sati i 20 minuta. Kolika je brzina rijeke ako brzina broda dok plovi uzvodno uz rijeku iznosi 16 km/h?

4. Dan je konveksni četverokut $ABCD$ takav da je $AB \perp BC$ i $AD \perp DC$, te $|BC| = 14$ i $|DC| = 30$. Neka je točka E na dijagonali $\overline{AC}$ takva da je $DE \perp AC$ (vidi sliku).
Ako je $|DE| = 24$, kolika je duljina dužine $\overline{AB}$?



5. Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C, takav da je $|BC| > |AC|$. Neka je točka D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu $\overline{AB}$. Na manjem luku $\overset{\frown}{BC}$ opisane kružnice trokutu ABC odabrana je točka E tako da je $|CA| = |CE|$. Pravac AE siječe visinu $\overline{CD}$ u točki M, a stranicu $\overline{BC}$ u točki N. Dokaži da je $|AM| = |MN| = |MC|$.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 8. RAZRED

Opć. 2002.

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE SU DANI NEKI OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. Najprije izračunajmo vrijednost razlomka. Vrijedi:

$$5.2^2 : 2.6 + 8.1 = \frac{5.2 \cdot 2 \cdot 2.6}{2.6} + 8.1 = 10.4 + 8.1 \quad \text{1 BOD}$$
$$= 18.5, \quad \text{1 BOD}$$
$$18.5^2 - 6.5^2 = (18.5 + 6.5) \cdot (18.5 - 6.5) = 25 \cdot 12 = 300, \quad \text{1 BOD}$$

pa je vrijednost brojnika

$$\left[(5.2^2 : 2.6 + 8.1)^2 - 6.5^2\right] : 0.025 = 300 : \frac{1}{40} = 300 \cdot 40 = 12\,000. \quad \text{1 BOD}$$

U nazivniku imamo

$$60.192 : 2.4 - 1.08 = 25.08 - 1.08 \quad \text{1 BOD}$$
$$= 24 \quad \text{1 BOD}$$

te je

$$(60.192 : 2.4 - 1.08)^2 - 0.24 \cdot 1400 = 24^2 - 0.24 \cdot 100 \cdot 14 = 24^2 - 24 \cdot 14 = 24 \cdot (24 - 14) = 24 \cdot 10 = 240, \quad \text{2 BODA}$$

odakle je vrijednost razlomka

$$\frac{\left[(5.2^2 : 2.6 + 8.1)^2 - 6.5^2\right] : 0.025}{(60.192 : 2.4 - 1.08)^2 - 0.24 \cdot 1400} = \frac{12\,000}{240} = 50, \quad \text{1 BOD}$$

pa je vrijednost čitavog izraza

$$50 : 0.125 = 50 : \frac{1}{8} = 50 \cdot 8 = 400. \quad \text{1 BOD}$$

Dakle, tražena vrijednost je 400.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Izvršimo li naznačene operacije, dobivamo sljedeći niz međusobno ekvivalentnih jednadžbi:

$$9x^2 - 6ax + a^2 + 16x^2 + 8x + 1 = 25x^2 - 10x + 1 \quad \text{1 BOD}$$
$$\iff \quad -6ax + 8x + a^2 = -10x \quad \text{1 BOD}$$
$$\iff \quad (6a - 18)x = -a^2. \quad \text{1 BOD}$$

Sada razlikujemo dva slučaja: $6a - 18 \neq 0$ i $6a - 18 = 0$, tj. $a \neq 3$ i $a = 3$. 2 BODA

(a) $6a - 18 \neq 0$. Sada zadnju napisanu jednadžbu smijemo podijeliti s $6a - 18$, čime dobivamo da je $x = \frac{a^2}{18 - 6a}$ njeno jedinstveno rješenje, a time i jedinstveno rješenje polazne jednadžbe. Dakle, u ovom slučaju jednadžba ima jedinstveno rješenje. 2 BODA

(b) $6a - 18 = 0$. Ovdje je $a = 3$, te je $a^2 = 3^2 = 9 \neq 0$. 1 BOD

Zato jednadžba ima oblik $0 \cdot x = 9$, tj. $0 = 9$, što nije istinito. Prema tome, u ovom slučaju ne postoji realan broj x koji zadovoljava jednadžbu, tj. ona nema rješenja. 1 BOD

Konačno, polazna jednadžba nema rješenja jedino u slučaju kada je $a = 3$, dok za sve realne brojeve $a \neq 3$ ona ima jedinstveno rješenje. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Brod je plovio od mjesta A do mjesta B na rijeci, i od mjesta B natrag do mjesta A. U jednom od ta dva međusobno suprotna smjera on je plovio nizvodno (niz rijeku), a u drugom uzvodno (uz rijeku). 1 BOD

Označimo brzinu broda kad plovi po mirnoj (stajaćoj) vodi s v_b, a brzinu rijeke s v_r. Na putu niz rijeku brzina broda je $v_b + v_r$, dok na putu uz rijeku ona iznosi $v_b - v_r$. 3 BODA

Prema pretpostavci zadatka zato je $v_b - v_r = 16$ km/h, odakle slijedi da je udaljenost od 80 km riječki brod preplovio za $\frac{80}{16} = 5$ sati. 1 BOD

Budući da je cijeli put od mjesta A do mjesta B i natrag preplovio za 8 sati i 20 minuta, tj. za $8\frac{1}{3}$ sata, za put nizvodno brodu je trebalo $8\frac{1}{3} - 5 = 3\frac{1}{3}$ sata. 1 BOD

To znači da je njegova brzina na putu niz rijeku bila $\frac{80}{3\frac{1}{3}} = 80 : \frac{10}{3} = 24$ km/h, tj. $v_b + v_r = 24$ km/h. 1 BOD

Time smo dobili sustav linearnih jednadžbi za v_b i v_r: $v_b + v_r = 24$, $v_b - v_r = 16$. 1 BOD

Metodom suprotnih koeficijenata odmah je $v_b = 20$ i $v_r = 4$. 2 BODA

Dakle, brzina rijeke je 4 km/h.

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut CED dobivamo relaciju $|CE|^2 = |CD|^2 - |DE|^2$, odakle je $|CE|^2 = 30^2 - 24^2 = (30-24)\cdot(30+24) = 324 = 18^2$, odnosno $|CE| = 18$. 2 BODA

Dalje trebamo izračunati duljinu $|AE|$. To možemo na razne načine.

---

1. način. Točka E nožište je visine iz vrha pravog kuta $\sphericalangle ADC$ na hipotenuzu $\overline{AC}$ pravokutnog trokuta ACD. Po Euklidovom poučku zato je $|DE|^2 = |AE|\cdot|CE|$, 3 BODA

odakle je $|AE| = \dfrac{|DE|^2}{|CE|} = \dfrac{24^2}{18} = 32$. 2 BODA

---

2. način. Primjenom Pitagorinog poučka na pravokutne trokute ACD i ADE dobijemo jednakosti

$$|AD|^2 = |AC|^2 - |CD|^2 \text{ i } |AD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2.$$ 1 BOD

Izjednačavanjem njihovih desnih strana (lijeve su im strane jednake!) imamo

$$|AC|^2 - |CD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2.$$ 1 BOD

Označimo $|AE| = x$. Tada je $|AC| = |AE| + |CE| = x + 18$, pa prethodna jednakost prelazi u

$$(x+18)^2 - 30^2 = x^2 + 24^2,$$

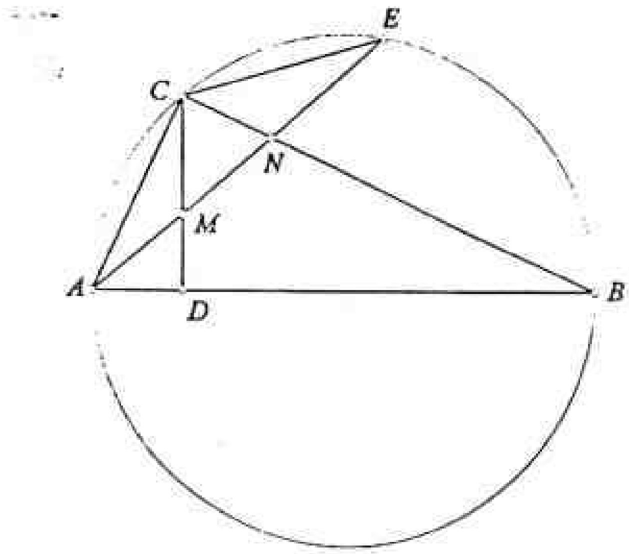
te dalje redom: $x^2 + 36x + 324 - 900 = x^2 + 576$, tj. $36x = 1\,152$, odnosno $x = 32$. Dakle, $|AE| = 32$. 3 BODA

Zato je $|AC| = 32 + 18 = 50$, 1 BOD

pa primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ACB izlazi $|AB|^2 = |AC|^2 - |BC|^2 = 50^2 - 14^2 = 2\,304$, te je $|AB| = 48$. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA

5.



Skica 1 BOD

Iz skice odmah možemo uočiti da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AEC$ jer su to dva obodna kuta nad tetivom $\overline{AC}$. 1 BOD

Budući da je $|CA| = |CE|$, trokut AEC je jednakokračan, odakle je $\sphericalangle AEC = \sphericalangle CAE$. Zajedno s prethodnim tada je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAE$. 1 BOD

Također je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC$ (kutovi s okomitim krakovima). 1 BOD

No, tada je $\sphericalangle CAM = \sphericalangle CAE = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ACM$, pa je trokut ACM jednakokračan. Odavde je $|AM| = |MC|$, što je prva tražena jednakost. 2 BODA

Trokuti ANC i BCD imaju dva para jednakih kutova: $\sphericalangle ACN = \sphericalangle ACB = 90°$ i $\sphericalangle CAN = \sphericalangle CAE = \sphericalangle ABC = \sphericalangle DBC$. Zato im je i treći par kutova jednak, tj. $\sphericalangle ANC = \sphericalangle DCB$. 2 BODA

Odavde je $\sphericalangle MNC = \sphericalangle ANC = \sphericalangle DCB = \sphericalangle MCN$, te je i trokut CNM jednakokračan. Zbog toga je $|MN| = |MC|$, čime je dokazana i druga jednakost. 1 BOD

Konačno, $|MN| = |MC| = |AM|$, što je i trebalo dokazati. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA