MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Regionalno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

Bjelovar, Korčula, Novalja, Vukovar, 24. svibnja 2002. godine

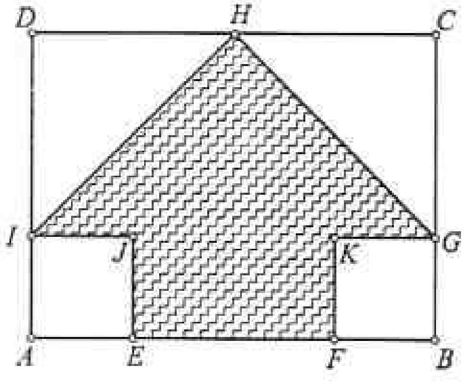
Zadaci za 4. razred

1. Na koliko se načina može sastaviti buket od 4 ruže ako su na raspolaganju 1 crvena, 1 žuta, 1 bijela, 1 narančasta, 1 ljubičasta i 1 roza ruža?

2. Za svoj novi bicikl Ivica je nabavio lokot koji se otvara pomoću šifre. Njegova je šifra četveroznamenkasti broj kojemu su sve četiri znamenke različite. Svaki prirodni broj može se bez ostatka podijeliti znamenkom stotica šifre, znamenka tisućica šifre je parna, a zbroj znamenke tisućica i znamenke desetica iznosi 7. Znamenka jedinica šifre manja je od znamenke desetica, a umnožak te dvije znamenke završava s 5. Koja je šifra Ivičinog lokota?

3. Marijana je za rođendan odlučila počastiti prijatelje u razredu. Kupila je 12 čokolada, 8 vrećica bombona i 9 lizalica, što je platila ukupno 216 kn. Kolika je cijena 1 čokolade, kolika 1 vrećice bombona, a kolika 1 lizalice, ako 2 vrećice bombona koštaju jednako kao 3 lizalice, a 4 čokolade koštaju 8 kn više od 2 vrećice bombona i 6 lizalica zajedno?

4. Dan je pravokutnik $ABCD$ sa stranicama duljina $|AB| = 8$ cm i $|AD| = 6$ cm. Kao na slici, neka su točke E, F, G, H, I, J i K odabrane tako da su likovi $AEJI$ i $FBGK$ kvadrati stranica duljine 2 cm, a točka H raspolavlja stranicu $\overline{DC}$. Izračunaj površinu osjenčanog lika na slici.



5. Dan je kvadrat $ABCD$. Produljimo li stranicu $\overline{AB}$ preko vrha B i stranicu $\overline{AD}$ preko vrha D za istu duljinu, dobit ćemo susjedne stranice kvadrata kojemu je opseg za 36 cm veći od opsega kvadrata $ABCD$, a površina za 135 cm^2 veća od površine kvadrata $ABCD$. Kolika je duljina stranice kvadrata $ABCD$?

REG 2002

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 4. RAZRED

1. <u>1. način.</u> Označimo ruže početnim slovom njihove boje: C za crvenu ružu, Ž za žutu, B za bijelu, N za narančastu, LJ za ljubičastu i R za ružu roza boje. Napravit ćemo sustavnu listu svih mogućih buketa od 4 ruže i zapisati ju u obliku tablice. U svakom retku tablice znakom ♠ označit ćemo ruže koje čine buket.

BR.	C	Ž	B	N	LJ	R	BR.	C	Ž	B	N	LJ	R
1.	♠	♠	♠	♠			9.	♠		♠		♠	♠
2.	♠	♠	♠		♠		10.	♠			♠	♠	♠
3.	♠	♠	♠			♠	11.		♠	♠	♠	♠	
4.	♠	♠		♠	♠		12.		♠	♠	♠		♠
5.	♠	♠		♠		♠	13.		♠	♠		♠	♠
6.	♠	♠			♠	♠	14.		♠		♠	♠	♠
7.	♠		♠	♠	♠		15.			♠	♠	♠	♠
8.	♠		♠	♠		♠							

Ovime smo iscrpili sve mogućnosti za različite bukete. Prema tome, od 6 ruža može se sastaviti ukupno 15 različitih buketa.

<u>2. način.</u> Označimo crvenu ružu slovom C, žutu slovom Ž, bijelu sa B, narančastu sa N, ljubičastu sa LJ, a ružu roza boje slovom R. Dakle, na izbor je dano ukupno 6 ruža. Broj različitih buketa od 4 ruže možemo odrediti i posredno. Umjesto da biramo 4 ruže koje ćemo staviti u buket, odabrat ćemo 2 ruže koje nećemo staviti u njega. Očito, broj mogućnosti za *parove odbačenih ruža* podudara se s brojem traženih buketa. Da bismo odredili broj tih parova, ispisat ćemo tablicu svih mogućnosti. Dvije *odbačene ruže* u svakom retku tablice označit ćemo znakom ♣.

BR.	C	Ž	B	N	LJ	R	BR.	C	Ž	B	N	LJ	R
1.	♣	♣					9.		♣				♣
2.	♣		♣				10.			♣	♣		
3.	♣			♣			11.			♣		♣	
4.	♣				♣		12.			♣			♣
5.	♣					♣	13.				♣	♣	
6.		♣	♣				14.				♣		♣
7.		♣		♣			15.					♣	♣
8.		♣			♣								

Očito, ovo su sve mogućnosti za *parove odbačenih ruža*, pa takvih parova ima 15. Uočimo da neobilježene ruže u svakom retku tablice čine *buket izabranih ruža*. Prema tome, ima ukupno 15 buketa od 4 ruže.

<u>3. način.</u> Prema uvjetima zadatka, na izbor nam je dano 6 ruža. Kao i kod prethodnog načina rješavanja, izbrojat ćemo koliko ima parova ruža koje u pojedinom izboru 4 ruže nećemo staviti u buket. Kako smo već zaključili, broj tih parova podudara se s brojem buketa od 4 ruže. Prvu ružu para možemo odabrati na 6 načina. Za svaku takvu odabranu ružu, drugu ružu možemo odabrati na 5 načina, kao bilo koju od preostalih 5 ruža. Dakle, ukupno imamo $6 \cdot 5 = 30$ mogućnosti. No, primijetimo da smo svaki par ruža brojali 2 puta (npr. buket od crvene i žute ruže brojavli smo i kao CŽ i kao ŽC). Zbog toga dobiveni rezultat moramo još podijeliti sa 2. Traženih buketa zato ima $30 : 2 = 15$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Označimo šifru Ivičinog lokota sa $\overline{abcd} = 1\,000a + 100b + 10c + d$. Odmah je $b = 1$ jer je 1 jedini broj s kojim svaki prirodni broj možemo podijeliti bez ostatka. Budući da je znamenka tisućica a parna, a šifra je četveroznamenkasti broj, a može biti samo jedna od znamenki 2, 4, 6 ili 8. No, kako je $a + c = 7$, te $8 > 7$, vidimo da a ne može biti jednako 8. Prema tome, ostale su samo ove mogućnosti: $a = 2$ i $c = 5$; $a = 4$ i $c = 3$; $a = 6$ i $c = 1$. Zbog pretpostavke da je $d < c$, sve potencijalne šifre dane su tablicom desno.

Uočimo da jedino brojevi 2 151 i 2 153 imaju svojstvo da im umnožak znamenke desetice i znamenke jedinice završava s 5. No, kako je uvjet da su sve četiri znamenke šifre međusobno različite, broj 2 151 otpada kao mogućnost.

Dakle, šifra Ivičinog lokota je 2 153.

a	b	c	d	$c \cdot d$	Šifra
2	1	5	0	0	Ne.
2	1	5	1	5	Ne.
2	1	5	2	10	Ne.
2	1	5	3	15	**Da.**
2	1	5	4	20	Ne.
4	1	3	0	0	Ne.
4	1	3	1	3	Ne.
4	1	3	2	6	Ne.
6	1	1	0	0	Ne.

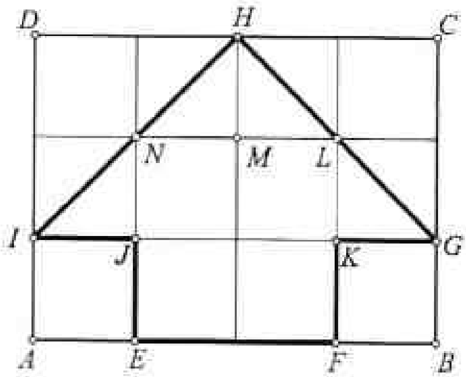
.... UKUPNO 10 BODOVA

REG 2002

$\boxed{3.}$ Cijene svih slatkiša koje je Marijana kupila izrazit ćemo pomoću cijene koštanja 3 lizalice. Označimo tu cijenu sa x. Zbog $6 = 2 \cdot 3$ i $9 = 3 \cdot 3$, slijedi da 6 lizalica košta 2 puta više od 3 lizalice, tj. $2x$, a 9 lizalica 3 puta više od 3 lizalice, odnosno $3x$. No, kako 2 vrećice bombona koštaju jednako kao 3 lizalice, a vrijedi i $8 = 4 \cdot 2$, svih 8 vrećica bombona koje je kupila Marijana koštat će 4 puta više nego 3 lizalice, tj. $4x$. Također, budući da 4 čokolade koštaju 8 kn više od 2 vrećice bombona i 6 lizalica zajedno, njihova je cijena $8 + x + 2x = 8 + 3x$. Kako je $12 = 3 \cdot 4$, ukupna cijena koju je Marijana platila za 12 čokolada bit će 3 puta veća od cijene 4 čokolade, tj. $3 \cdot (8 + 3x) = 3 \cdot 8 + 3 \cdot 3x = 24 + 9x$. Ukupni iznos novca kojeg je Marijana potrošila na slatkiše, tj. na 12 čokolada, 8 vrećica bombona i 9 lizalica tada je $9x + 24 + 4x + 3x = 16x + 24$. S druge strane, taj je iznos jednak 216 kn, pa imamo $16x + 24 = 216$, tj. $16x = 216 - 24$, odnosno $16x = 192$, odakle je $x = 192 : 16 = 12$. Dakle, 3 lizalice, tj. 2 vrećice bombona koštale su 12 kn, te je cijena 1 lizalice zato $12 : 3 = 4$ kn, a cijena 1 vrećice bombona $12 : 2 = 6$ kn. Ostaje još izračunati cijenu 1 čokolade. Cijena 4 čokolade je $3 \cdot 12 + 8 = 36 + 8 = 44$ kn, pa 1 čokolada košta $44 : 4 = 11$ kn.
Prema tome, Marijana je svaku lizalicu platila 4 kn, svaku vrećicu bombona 6 kn, a svaku čokoladu 11 kn.
.... UKUPNO 10 BODOVA

$\boxed{4.}$ __1. način.__ Zadatak ćemo riješiti tako da pravokutnik $ABCD$ podijelimo kvadratnom mrežom na kvadrate stranica duljine 2 cm, kao na slici. Površina svakog takvog kvadrata je $P_1 = 2 \cdot 2 = 4$ cm^2. Uočimo da su trokuti IJN, KGL, NMH i MLH zapravo polovine kvadrata stranica duljine 2 cm. Zato je površina svakog od tih trokuta jednaka $P_2 = P_1 : 2 = 4 : 2 = 2$ cm^2. Budući da se osjenčani dio na slici u zadatku sastoji od 4 kvadrata površine P_1 i 4 trokuta površine P_2, njegova je površina jednaka

$$P = 4P_1 + 4P_2 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16 + 8 = 24 \text{ cm}^2.$$



__2. način.__ Kao i u prethodnom rješenju, pravokutnik $ABCD$ podijelimo kvadratnom mrežom na kvadrate stranica duljine 2 cm i uočimo da se osjenčani dio na slici sastoji od 4 kvadrata kvadratne mreže i 4 trokuta – polovina kvadrata kvadratne mreže. Kako svaki od tih dijelova ima svoj jednaki neosjenčani par, zaključujemo da je površina osjenčanog dijela pravokutnika $ABCD$ jednaka površini neosjenčanog dijela tog pravokutnika, što znači da je tražena površina dva puta manja od površine pravokutnika $ABCD$. Zbog $P(ABCD) = 8 \cdot 6 = 48$ cm^2, tražena je površina jednaka $P = P(ABCD) : 2 = 48 : 2 = 24$ cm^2.
.... UKUPNO 10 BODOVA

$\boxed{5.}$ Označimo sa a duljinu stranice kvadrata $ABCD$, a sa x duljinu za koju smo produljili stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, obje izražene u centimetrima. Novi kvadrat označimo s $AEGH$, kao na slici. Uočimo odmah da je duljina stranice kvadrata $AEGH$ jednaka $a + x$, odakle slijedi da je njegov opseg za $4x$ veći od opsega kvadrata $ABCD$. Prema pretpostavci, tada je $4x = 36$, tj. $x = 36 : 4 = 9$ cm. Također, sa slike vidimo da je površina kvadrata $AEGH$ veća od površine kvadrata $ABCD$ za površinu pravokutnika $BEFC$ i površinu pravokutnika $DFGH$. Kako je $P(BEFC) = x \cdot a = 9a$ i $P(DFGH) = (a + x) \cdot x = (a + 9) \cdot 9 = 9a + 81$, imamo $P(BEFC) + P(DFGH) = 9a + 9a + 81 = 18a + 81$, pa je prema uvjetu zadatka $18a + 81 = 135$, tj. $18a = 135 - 81$, odnosno $18a = 54$, odakle je $a = 54 : 18 = 3$ cm.
Dakle, duljina stranice kvadrata $ABCD$ iznosi 3 cm.
.... UKUPNO 10 BODOVA