MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Regionalno natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

Bjelovar, Korčula, Novalja, Vukovar, 24. svibnja 2002. godine

Zadaci za 6. razred

1. Putnik je putovao 4 dana. Prvog je dana prešao $\frac{3}{11}$ ukupne duljine puta, drugog dana $\frac{7}{20}$ duljine ostatka puta, trećeg dana $\frac{5}{13}$ duljine ostatka puta nakon drugog dana, a četvrtog dana posljednjih 320 km puta. Kolika je ukupna duljina puta?

2. Ana je neku knjigu pročitala za 31 dan, pri čemu je svakog dana pročitala isti broj stranica. Marija je tu knjigu pročitala za isti broj dana kao Ana, no ona je prvoga dana čitanja pročitala $\frac{1}{4}$ broja stranica koje je dnevno čitala Ana, a svakog sljedećeg dana po jednu stranicu više nego prethodnog. Koliko stranica ima knjiga koju su čitale Ana i Marija?

3. Na polici u voćarni nalazi se 5 lubenica. Prva i druga lubenica zajedno teže 12 kg, druga i treća zajedno 13.5 kg, treća i četvrta zajedno 11.5 kg, četvrta i peta zajedno 8 kg, dok prva, treća i peta lubenica zajedno imaju 16 kg. Koliko je teška svaka od tih 5 lubenica?

4. Dan je trokut ABC. Neka su točka P na stranici $\overline{AC}$ i točka Q na stranici $\overline{BC}$ takve da je opseg trokuta ABP jednak opsegu trokuta ABQ, a opseg trokuta AQC jednak opsegu trokuta PBC. Dokaži da je trokut ABC jednakokračan.

5. Dan je šiljastokutni trokut ABC takav da je $\sphericalangle CAB = 45°$. Vrhom A povučena je okomica na simetralu kuta $\sphericalangle CAB$ i ta okomica siječe pravac BC u točki M. Odredi preostale kutove trokuta ABC ako vrijedi relacija $|AB| + |AC| = |BM|$.

REG 2002

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 6. RAZRED

1. 1. način. Zadatak ćemo riješiti rekonstrukcijom puta unatrag, tj. od njegovog posljednjeg (četvrtog) do prvog dana. Budući da je putnik trećeg dana prešao $\frac{5}{13}$ ostatka puta nakon drugog dana, za četvrti mu je dan ostalo za prijeći još $\frac{8}{13}$ tog ostatka, što prema pretpostavci zadatka iznosi 320 km. Prema tome, duljina ostatka puta nakon drugog dana iznosi $\frac{13}{8}\cdot 320 = 520$ km. S druge strane, putnik je drugog dana puta prešao $\frac{7}{20}$ ostatka puta nakon prvog dana, pa mu je za treći i četvrti dan ostalo još $\frac{13}{20}$ tog ostatka. Odavde slijedi da ostatak puta nakon prvog dana iznosi $\frac{20}{13}\cdot 520 = 800$ km. Konačno, kako je putnik prvog dana prešao $\frac{3}{11}$ ukupnog puta, ostatak puta nakon prvog dana jednak je $\frac{8}{11}$ duljine cijelog puta. Dakle, zaključujemo da duljina cijelog puta iznosi $\frac{11}{8}\cdot 800 = 1\,100$ km.

2. način. Zadatak smo mogli riješiti i rekonstrukcijom dionica puta onim redom kako su se odvijale, tj. od prvog do četvrtog dana. Označimo ukupnu duljinu puta, izraženu u kilometrima, sa x. Prvog je dana putnik prešao $\frac{3}{11}x$ km, pa mu je nakon toga za prijeći ostalo još $x-\frac{3}{11}x=\frac{8}{11}x$ km. Kako je drugog dana prešao još $\frac{7}{20}\cdot\frac{8}{11}x=\frac{14}{55}x$ km, ukupni put prevaljen prva dva dana iznosi $\frac{3}{11}x+\frac{14}{55}x=\frac{29}{55}x$ km. To znači da je do kraja puta ostalo još $x-\frac{29}{55}x=\frac{26}{55}x$ km. Trećeg je dana putnik prešao $\frac{5}{13}$ te udaljenosti, tj. još $\frac{5}{13}\cdot\frac{26}{55}x=\frac{2}{11}x$ km, pa ukupna prevaljena dionica nakon prva tri dana iznosi $\frac{29}{55}x+\frac{2}{11}x=\frac{39}{55}x$ km. Dakle, za zadnji je dan putniku ostalo za prijeći $x-\frac{39}{55}x=\frac{16}{55}x$ km, odakle je $\frac{16}{55}x=320$, tj. $x=320\cdot\frac{55}{16}=1\,100$ km.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Označimo sa x broj stranica knjige koje je Ana pročitala u jednom danu. Budući da je svakoga dana čitala isti broj stranica, a knjigu je pročitala za 31 dan, slijedi da knjiga ima ukupno $31x$ stranica. S druge strane, Marija je prvog dana čitanja pročitala $\frac{1}{4}x$ stranica, drugog dana $\frac{1}{4}x+1$, trećeg dana $\frac{1}{4}x+2$, ..., sve do posljednjeg, 31. dana čitanja, kada je pročitala $\frac{1}{4}x+30$ stranica knjige. To znači da ukupni broj stranica knjige možemo zapisati i kao

$$\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{4}x+1\right)+\left(\frac{1}{4}x+2\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4}x+30\right)=31\cdot\frac{1}{4}x+(1+2+\cdots+30)=\frac{31}{4}x+\frac{30\cdot 31}{2}=\frac{31}{4}x+465.$$

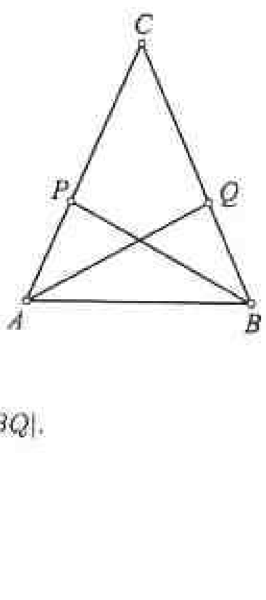
Prema tome, $31x=\frac{31}{4}x+465$, odakle je $x=20$, i konačno $31x=31\cdot 20=620$. Dakle, knjiga koju su pročitale Ana i Marija ima 620 stranica.

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Označimo masu treće lubenice, izraženu u kilogramima, sa x. Usporedimo li zajedničku masu prve i druge lubenice sa zajedničkom masom druge i treće, uočavamo da druga i treća lubenica zajedno imaju $13.5-12=1.5$ kg više od zajedničke mase prve i druge lubenice. Budući da je druga lubenica zajednička u obje mase, zaključujemo da razliku čini razlika u masama prve i treće lubenice. To znači da je masa prve lubenice za 1.5 kg manja od mase treće lubenice, tj. iznosi $x-1.5$ kg. Potpuno analogno, uspoređivanjem zajedničke mase treće i četvrte lubenice sa zajedničkom masom četvrte i pete, slijedi da masa pete lubenice iznosi $x-3.5$ kg. Kako je po pretpostavci zajednička masa prve, treće i pete lubenice jednaka 16 kg, imamo $(x-1.5)+x+(x-3.5)=16$, tj. $3x-5=16$, odakle je $3x=21$, odnosno $x=7$. Dakle, treća lubenica ima 7 kg, prva $7-1.5=5.5$ kg, a peta $7-3.5=3.5$ kg. Konačno, masa druge lubenice je $13.5-7=6.5$ kg, dok četvrta lubenica ima $11.5-7=4.5$ kg.

.... UKUPNO 10 BODOVA

4. Označimo s $O(ABC)$, $O(ABP)$, $O(ABQ)$, $O(AQC)$, i $O(PBC)$ redom opsege trokuta ABC, ABP, ABQ, AQC i PBC. Tada je



$$\begin{aligned}O(ABQ)+O(AQC)&=|AB|+|BQ|+|AQ|+|AQ|+|QC|+|AC|\\&=|AB|+(|BQ|+|QC|)+|AC|+2|AQ|=O(ABC)+2|AQ|\end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned}O(ABP)+O(PBC)&=|AB|+|BP|+|AP|+|PB|+|BC|+|PC|\\&=|AB|+(|AP|+|PC|)+|BC|+2|BP|=O(ABC)+2|BP|.\end{aligned}$$

Zbog $O(ABP)=O(ABQ)$ i $O(AQC)=O(PBC)$, odavde je $|AQ|=|BP|$, a dalje i

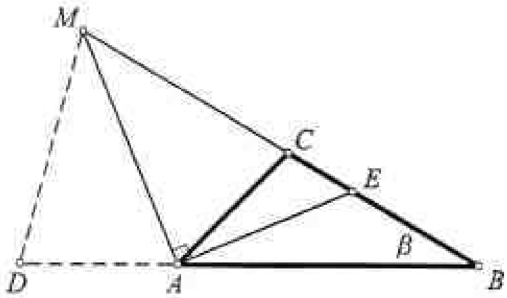
$$|AP|=O(ABP)-|AB|-|BP|=O(ABQ)-|AB|-|AQ|=|BQ|.$$

REG 2002.

Prema tome, trokuti ABP i ABQ imaju zajedničku stranicu $\overline{AB}$ i dva para stranica jednakih duljina ($|AP| = |BQ|$ i $|AQ| = |BP|$), pa su oni sukladni, tj. $\triangle ABP \cong \triangle ABQ$. Zato je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle PAB = \sphericalangle QBA = \sphericalangle CBA$, što znači da je trokut ABC jednakokračan, s krakovima $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

$\boxed{5.}$ Produljimo stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC preko vrha A do točke D tako da je $|AD| = |AC|$. Prema pretpostavci, tada je $|BD| = |AB| + |AD| = |AB| + |AC| = |BM|$, što znači da je trokut MDB jednakokračan, s krakovima $\overline{BD}$ i $\overline{BM}$. Zbog toga je $\sphericalangle MDB = \sphericalangle BMD$. Neka je točka E sjecište simetrale kuta kod vrha A trokuta ABC i stranice $\overline{BC}$. Tada je $\sphericalangle CAE = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\cdot 45^\circ = 22.5^\circ$, $\sphericalangle MAE = 90^\circ$, $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MAE - \sphericalangle CAE = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$ i $\sphericalangle DAM = 180^\circ - \sphericalangle MAC - \sphericalangle CAB = 180^\circ - 67.5^\circ - 45^\circ = 67.5^\circ = \sphericalangle MAC$, odakle primjenom poučka S - K - S o sukladnosti trokuta slijedi da je $\triangle MDA \cong \triangle MCA$ ($|AD| = |AC|$, $\sphericalangle DAM = \sphericalangle MAC$, $\overline{AM}$ je zajednička stranica). Zato je $\sphericalangle MDB = \sphericalangle MDA = \sphericalangle ACM$. Označimo li kut kod vrha B trokuta ABC sa β, tj. $\beta = \sphericalangle ABC$, dalje je $\sphericalangle MDB = \sphericalangle ACM = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC = 45^\circ + \beta$ (vanjski kut kod vrha C trokuta ABC). Budući da je zbroj kutova u trokutu jednak 180°, iz trokuta MDB čitamo $\sphericalangle BMD + \sphericalangle MDB + \sphericalangle DBM = 180^\circ$, tj. $(45^\circ + \beta) + (45^\circ + \beta) + \beta = 180^\circ$, te je $3\beta + 90^\circ = 180^\circ$, odnosno $\beta = 30^\circ$. Konačno, $\sphericalangle BCA = 180^\circ - \sphericalangle CAB - \sphericalangle ABC = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$. Dakle, kutovi trokuta ABC su $\sphericalangle CAB = 45^\circ$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 105^\circ$.



.... UKUPNO 10 BODOVA