MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002.

I. razred

1. Na gornjem dijelu kružnice sa središtem O nalaze se točke A, B, C, D, E, tako da je $\sphericalangle AOB = 60^\circ$, $\sphericalangle AOC = 90^\circ$, $\sphericalangle AOD = 120^\circ$, $\sphericalangle AOE = 180^\circ$. Ako je P točka koja dijeli polumjer $\overline{OA}$ u omjeru zlatnog reza, tj. $|OP| : |PA| = |PA| : |OA|$, odredite međusobne omjere kvadrata udaljenosti $|PA|^2$, $|PB|^2$, $|PC|^2$, $|PD|^2$, $|PE|^2$.

2. U Kartezijevoj koordinatnoj ravnini skicirajte skup točaka (x, y) koje zadovoljavaju uvjet

$$||x| + |y| - 2| \geq 1.$$

3. Unutar kvadrata stranice duljine 1 nacrtani su svi jednakokračni trokuti kojima je baza stranica kvadrata, a vrh polovište nasuprotne stranice. Odredite površinu osmerokuta koji je presjek ta četiri trokuta.

4. Neka je a realan broj takav da je $a^5 - a^3 + a = 2$. Dokažite da vrijede nejednakosti

$$3 < a^6 < 4.$$

Rješenja zadataka za I. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Za $|OA| = 2$ imamo redom

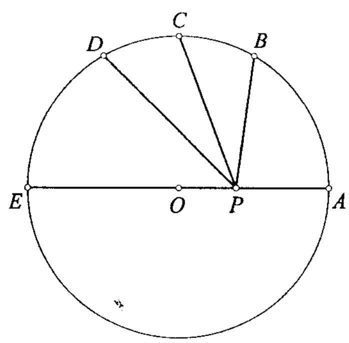
$$A = (2,0),\ B = (1,\sqrt{3}),\ C = (0,2),\ D = (-1,\sqrt{3}),\ E = (-2,0)\ ,$$

a za $P = (x,y)$ je

$$x : (2-x) = (2-x) : 2\ , \quad \text{tj.} \quad x^2 - 6x + 4 = 0.$$

To je ekvivalentno s $(x-3)^2 = 5$, odakle dobivamo $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ i $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

5 bodova



Odgovara jedino $x = 3 - \sqrt{5}$. Zato je $P = (3-\sqrt{5}, 0)$. Sada dobivamo redom

$$\begin{aligned}
|PA|^2 &= (2-3+\sqrt{5})^2 &&= (\sqrt{5}-1)^2 &&= 2(3-\sqrt{5}),\\
|PB|^2 &= (2-\sqrt{5})^2 + 3 &&= 12 - 4\sqrt{5} &&= 4(3-\sqrt{5}),\\
|PC|^2 &= (3-\sqrt{5})^2 + 2^2 &&= 18 - 6\sqrt{5} &&= 6(3-\sqrt{5}),\\
|PD|^2 &= (4-\sqrt{5})^2 + 3 &&= 24 - 8\sqrt{5} &&= 8(3-\sqrt{5}),\\
|PE|^2 &= (5-\sqrt{5})^2 &&= 30 - 10\sqrt{5} &&= 10(3-\sqrt{5}),
\end{aligned}$$

20 bodova

pa je zato

$$|PA|^2 : |PB|^2 : |PC|^2 : |PD|^2 : |PE|^2 = 1 : 2 : 3 : 4 : 5.$$

2. Moramo promatrati dva slučaja:

$$1^\circ \quad |x|+|y|-2 \geq 1 \qquad \text{ili} \qquad 2^\circ \quad |x|+|y|-2 \leq -1$$

$$|x|+|y| \geq 3 \qquad\qquad |x|+|y| \leq 1.$$

5 bodova

Skicirajmo skup točaka za koje je $|x|+|y|=k, \quad k \in \mathbf{N}$. Ovdje moramo promatrati četiri slučaja:

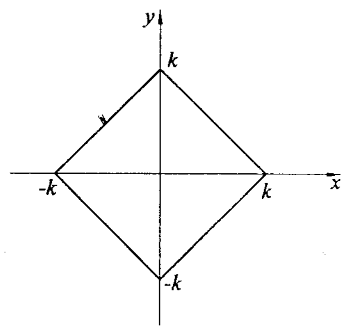
$$1) \quad x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x+y=k,$$

$$2) \quad x \leq 0,\ y \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x+y=k,$$

$$3) \quad x \leq 0,\ y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad -x-y=k,$$

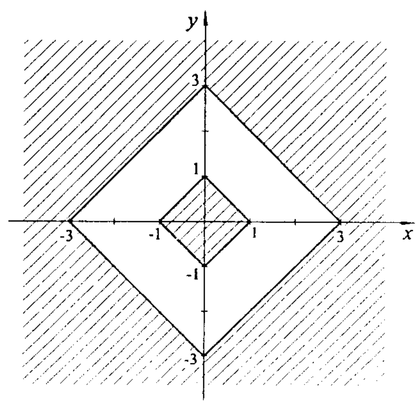
$$4) \quad x \geq 0,\ y \leq 0 \quad \Rightarrow \quad x-y=k.$$

Traženi skup točaka je kvadrat s vrhovima u točkama $(\pm k, \pm k)$.



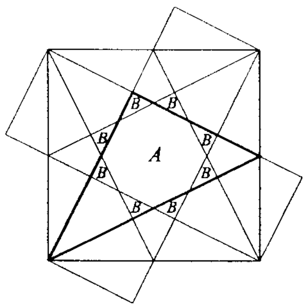
5 bodova

Prvu nejednakost zadovoljavaju točke izvan ili na rubu kvadrata s vrhovima u točkama $(\pm 3, \pm 3)$. Druga je zadovoljena za točke unutar ili na rubu kvadrata s vrhovima u točkama $(\pm 1, \pm 1)$.

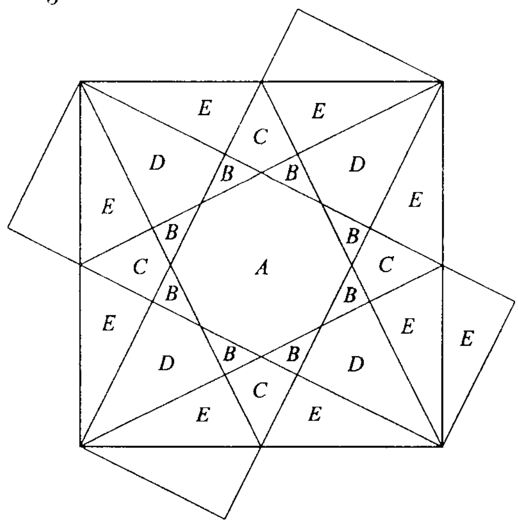


15 bodova

3. *Prvo rješenje.* Od danog kvadrata može se složiti pet kvadrata stranice duljine x, pa je $x^2 = \frac{1}{5}$ (slika 1). 5 bodova



Slika 1.



Slika 2.

5 bodova

Označimo li s A površinu traženog osmerokuta, a s B površinu svakog označenog trokuta, dobivamo

$$A + 4B = \frac{1}{5}.$$ 5 bodova

Podebljani pravokutni trokut ima duljine stranica $\frac{3}{2}x$, $2x$, $\frac{5}{2}x$, koje se odnose kao $3 : 4 : 5$, pa isto vrijedi i za trokut površine B koji mu je sličan. Ako su mu duljine stranica $3y$, $4y$, $5y$, tada je $12y = x$. Površina B je jednaka

$$B = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 4y = 6y^2 = 6 \cdot \frac{x^2}{144} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{120}.$$

Konačno je $A = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}$. 10 bodova

Drugo rješenje. Slika 2.

Uz oznake kao na slici dobivamo:

$$A + 4B = \frac{1}{5} \qquad (1)$$

$$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20},$$

$$C + 2E = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{1}{40},$$

$$B + C + E = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{12} - \frac{1}{40} - \frac{1}{20} = \frac{1}{120},$$

$$(1) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{5} - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}.$$ 25 bodova

4. Sređivanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} a^6+1 &= (a^2)^3+1 = (a^2+1)(a^4-a^2+1) \\ &= \frac{a^2+1}{a}(a^5-a^3+a) = 2\left(a+\frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da zbog $a^6>0$ slijedi $a^6+1>0$ i $2\left(a+\frac{1}{a}\right)>0$, tj. $a>0$. 5 bodova

Sada možemo primijeniti A-G nejednakost:

$$a^6+1=2\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq 4\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=4.$$

Nejednakost mora biti stroga jer iz $a=\frac{1}{a}$ slijedi $a=1$, a ovo ne zadovoljava uvjet $a^5-a^3+a=2$. Odavde slijedi $a^6>3$. 10 bodova

Dokažimo sada drugu nejednakost:

$$\begin{aligned} a^3+2 &= a^5+a \quad /:a^3 \\ 1+\frac{2}{a^3} &= a^2+\frac{1}{a^2} \overset{\text{A-G}}{\geq} 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2. \end{aligned}$$

Nejednakost je stroga jer je opet $a^2\neq\frac{1}{a^2}$. Odavde slijedi

$$a^3<2 \quad \text{tj.} \quad a^6<4.$$ 10 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002.

II. razred

1. Odredite i skicirajte skup točaka u kompleksnoj ravnini koji je određen uvjetom

$$\left|\frac{1}{z} - i\right| \leq 1.$$

2. Oko kružnice polumjera 1 položeno je šest kružnica polumjera r, tako da svaka dodiruje izvana središnju kružnicu (polumjera 1) i dvije susjedne kružnice polumjera r. Oko ovih kružnica položeno je još šest većih kružnica polumjera R, od kojih svaka dodiruje izvana dvije kružnice polumjera r i dvije veće kružnice (polumjera R). Izračunajte polumjere r i R.

3. Za koje realne brojeve a jednadžba

$$\frac{a^2}{x(x+1)} + \frac{a^2}{(x+1)(x+2)} + \frac{a^2}{(x+2)(x+3)} + \frac{a^2}{(x+3)(x+4)} + \frac{a^2}{(x+4)(x+5)} = 1$$

ima sva rješenja realna?

4. Ako je $n \geq 3$, odredite sva realna rješenja sistema jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2x_3\ldots x_n &= 0, \\ x_2^2 - x_1x_3\ldots x_n &= 0, \\ &\vdots \\ x_n^2 - x_1x_2\ldots x_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja zadataka za II. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Za $z = x + iy$ redom imamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} + i\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}, \\
\left|\frac{1}{z} - i\right|^2 &= \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 \\
&= \frac{x^2 + (x^2+y^2+y)^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2 + (x^2+y^2)^2 + 2y(x^2+y^2) + y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{x^2+y^2+2y+1}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

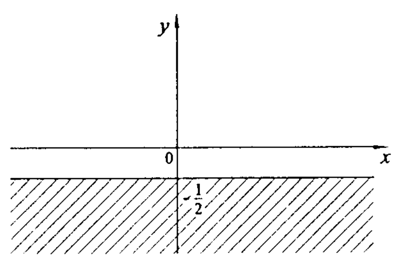
20 bodova

Sada je

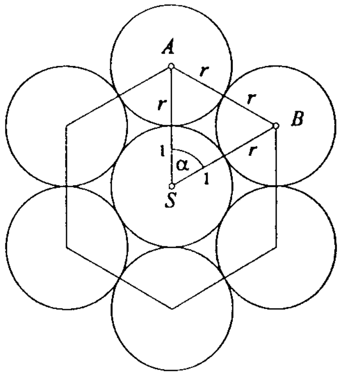
$$\left|\frac{1}{z} - i\right|^2 \le 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x^2+y^2+2y+1}{x^2+y^2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow\quad 2y+1 \le 0 \quad\Leftrightarrow\quad y \le -\frac{1}{2}.$$

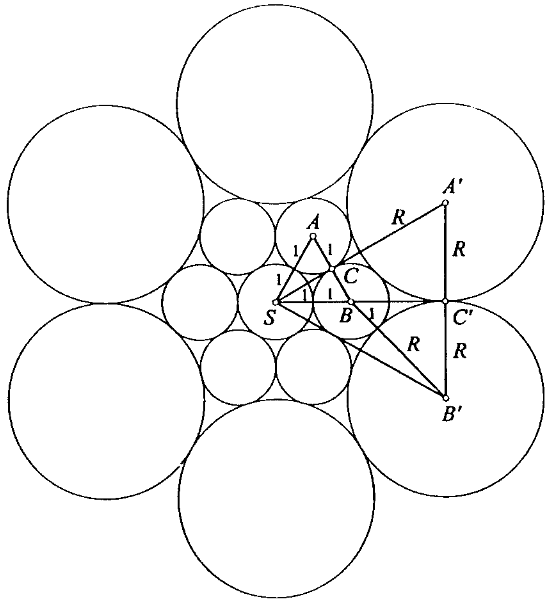
Rješenje su svi kompleksni brojevi takvi da je $\operatorname{Im} z \le -\frac{1}{2}$. 5 bodova



2. Polumjer svake od šest kružnica oko središnje, jednak je $r = 1$. Naime, u vrhove pravilnog šesterokuta stranice $a = 2$ postavimo šest kružnica polumjera $r = 1$, i upišemo kružnicu polumjera 1 sa središtem u središtu pravilnog šesterokuta (slika 1).



Slika 1.



Slika 2.

Preostaje izračunati polumjer R velikih kružnica (slika 2). Koristit ćemo sličnost trokuta:

$$\triangle SAB \sim \triangle SA'B' \quad \Rightarrow \quad R = \frac{|C'A'|}{|CA|} = \frac{|SC'|}{|SC|}. \qquad (1) \qquad\qquad \text{10 bodova}$$

Kako je

$$|SC'| = |SB| + |BC'| = 2 + \sqrt{(R+1)^2 - R^2} = 2 + \sqrt{2R+1},$$

$$|SC| = \sqrt{4-1} = \sqrt{3},$$

iz (1) dobivamo jednadžbu

$$R = \frac{2 + \sqrt{2R+1}}{\sqrt{3}},$$

a kvadriranjem i sređivanjem kvadratnu jednadžbu

$$3R^2 - 2(1 + 2\sqrt{3})R + 3 = 0. \qquad\qquad \text{10 bodova}$$

Njezina rješenja su

$$R_{1,2} = \frac{1 + 2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{1+\sqrt{3}}}{3}.$$

Zbog $R > 1$ slijedi $R = \dfrac{1 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{1+\sqrt{3}}}{3}$. 5 bodova

3. Uočimo da rješenje x mora biti različito od
$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5$. 5 bodova
Nadalje

$$\frac{1}{y(y+1)}=\frac{y+1-y}{y(y+1)}=\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}.$$ 5 bodova

Stoga jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$a^2\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)\right]=1,$$

odakle dobivamo

$$a^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}\right)=1,$$

i nakon sređivanja,

$$\frac{x^2+5x-5a^2}{x^2+5x}=0,\quad \text{tj.}\quad x^2+5x-5a^2=0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+20a^2}}{2}\in\mathbf{R}$$

za svaki $a\in\mathbf{R}$. 10 bodova

Uočimo da mora biti:

$$\begin{aligned}
x &\neq 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\\
2x &\neq 0,\ -2,\ -4,\ -6,\ -8,\ -10,\\
2x+5 &\neq 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\\
\pm\sqrt{25+20a^2} &\neq 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\\
25+20a^2 &\neq 25,\ 9,\ 1,\\
20a^2 &\neq 0,\ -16,\ -24,\\
a^2 &\neq 0,\\
a &\neq 0.
\end{aligned}$$

Dakle, jednadžba ima sva rješenja realna za sve $a\in\mathbf{R}\backslash\{0\}$. 5 bodova

4. Napišemo li jednadžbe u obliku

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2x_3\dots x_n, \\ x_2^2 &= x_1x_3\dots x_n, \\ &\vdots \\ x_n^2 &= x_1x_2\dots x_{n-1}, \end{aligned}$$

i pomnožimo ih, dobivamo

$$(x_1x_2\dots x_n)^2 = (x_1x_2\dots x_n)^{n-1}.$$ 5 bodova

Ako je $x_1x_2\dots x_n = 0$, onda je bar jedan od brojeva x_1, x_2, ... x_n, jednak nuli, pa moraju svi biti jednaki nuli. 5 bodova

Neka je sada $x_1x_2\dots x_n \neq 0$.
Ako je n paran, onda je $x_1x_2\dots x_n = 1$. U ovom slučaju je

$$x_j^2 = \frac{x_1x_2\dots x_n}{x_j} = \frac{1}{x_j} \quad \Rightarrow \quad x_j^3 = 1, \quad \text{tj.} \quad x_j = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$ 5 bodova

Ako je n neparan i $n \neq 3$, onda je

$$x_j^2 = \frac{x_1x_2\dots x_n}{x_j} = \pm\frac{1}{x_j} \quad \Rightarrow \quad x_j^3 = \pm 1, \quad \text{tj.} \quad x_j = \pm 1, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

5 bodova

Ako je $n = 3$, imamo sustav

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2x_3, \\ x_2^2 &= x_3x_1, \\ x_3^2 &= x_1x_2. \end{aligned}$$

Neka je $c \in \mathbf{R}$ takav da je $x_1x_2x_3 = c^3$. Ako je $c = 0$, onda je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Ako je $c \neq 0$, onda je

$$x_j^2 = \frac{x_1x_2x_3}{x_j} \quad \Rightarrow \quad x_j^3 = c^3 \quad \text{tj.} \quad x_j = c, \quad j = 1, 2, 3.$$ 5 bodova

Dakle, za $n = 3$ rješenje je $x_j = c$, $c \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, 3$.

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002.

III. razred

1. Ako je $ABCD$ kvadrat i P bilo koja točka u njegovoj ravnini, dokažite da se okomice iz točaka B, C, D, A redom na pravce AP, BP, CP, DP sijeku u istoj točki.

2. U paralelogramu su duljine stranica $|AB| = a$ i $|BC| = b$, a kut između dijagonala $\sphericalangle AOB = \alpha$, gdje je O sjecište dijagonala. Kolika je udaljenost h stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$?

3. Odredite duljine bridova pravilne uspravne četverostrane prizme ako su one prirodni brojevi a oplošje prizme je numerički jednako zbroju duljina svih bridova.

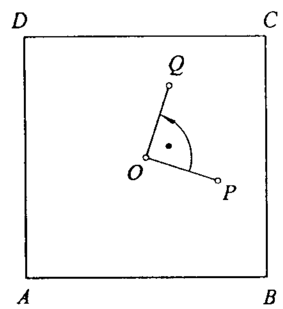
4. Odredite kutove α i β pravokutnog trokuta ako vrijedi

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{tg}^3\beta = 70.$$

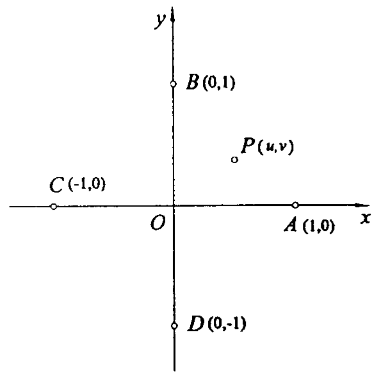
Napomena. Dovoljno je odrediti $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{tg}\beta$.

Rješenja zadataka za III. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* (Slika 1.) Neka je Q slika od P pri rotaciji oko središta O kvadrata $ABCD$ za $90°$, koja preslikava $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$, $D \rightarrow A$. Ta rotacija preslikava pravce DP, AP, BP, CP redom na pravce AQ, BQ, CQ, DQ, koji se sijeku u istoj točki.



Slika 1.



Slika 2.

25 bodova

Drugo rješenje. Uz oznake na slici 2 pravci AP, BP, CP, DP imaju koeficijente smjerova

$$\frac{v}{u-1}, \quad \frac{v-1}{u}, \quad \frac{v}{u+1}, \quad \frac{v+1}{u},$$

pa okomice iz točaka B, C, D, A redom na te pravce imaju jednadžbe

$$y-1 = \frac{1-u}{v}\,x \qquad (1),$$

$$y = \frac{u}{1-v}\,(x+1) \qquad (2),$$

$$y+1 = -\frac{u+1}{v}\,x, \qquad (3)$$

$$y = -\frac{u}{v+1}\,(x-1). \qquad (4)$$

15 bodova

Oduzimanjem prve i treće jednadžbe dobivamo

$$-2 = \frac{2}{v}\,x$$

5 bodova

s rješenjem $x = -v$, a onda se iz svake jednadžbe (1)-(4) dobiva $y = u$. Zato se četiri pravca (1)-(4) sijeku u točki $Q(-v, u)$.

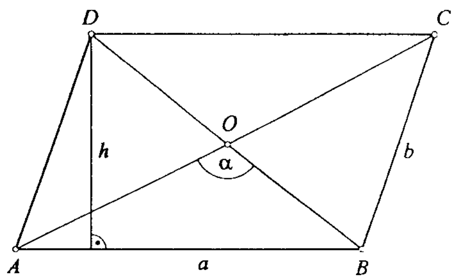
5 bodova

2. Prikažimo površinu P paralelograma na dva načina.

$$P = 4P_{\triangle ABO} = 2|OA|\cdot|OB|\sin\alpha. \tag{1}$$

$$P = |AB|\cdot|DH| = ah, \tag{2}$$

gdje je α kut između dijagonala. 5 bodova



Da bismo odredili $|OA|\cdot|OB|$ primijenit ćemo kosinusov poučak na trokute OAB i OBC:

$$a^2 = |OA|^2+|OB|^2-2|OA|\cdot|OB|\cos\alpha. \tag{3}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= |OB|^2+|OC|^2+2|OB|\cdot|OC|\cos\alpha. \\ &= |OB|^2+|OA|^2+2|OB|\cdot|OA|\cos\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Zbrajanjem jednakosti (3) i (4) dobivamo

$$|OA|^2+|OB|^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

Odavde i iz (3) slijedi

$$|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{4\cos\alpha}(b^2-a^2).$$ 15 bodova

Iz (1) je tada

$$P=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

Sada iz (2) slijedi

$$h=\frac{b^2-a^2}{2a}\operatorname{tg}\alpha.$$ 5 bodova

3. Neka su a i b duljine temeljnog i pobočnog brida. Tada je

$$\begin{aligned} 8a + 4b &= 2a^2 + 4ab, \quad \text{tj.} \\ 2b &= a(a + 2b - 4), \qquad (1) \end{aligned}$$

5 bodova

odakle slijedi da je a paran broj. Ako je $a = 2a'$, tada je

$$b = a(a' + b - 2) = na,$$ 5 bodova

gdje je $n \in \mathbf{N}$. Uz $b = na$ iz (1) slijedi

$$\begin{aligned} 2na &= a(a + 2na - 4), \\ 2n &= a + 2na - 4, \quad \text{tj.} \\ a &= \frac{2n+4}{2n+1} = 1 + \frac{3}{2n+1}. \end{aligned}$$

10 bodova

Zato je nužno $n = 1$, $a = 2$, $b = 2$. Imamo kocku sa zbrojem duljina bridova $12 \cdot 2 = 24$ i oplošjem $6 \cdot 4 = 24$. 5 bodova

4. Stavimo li $\operatorname{tg} \alpha = x$, tada je $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{x}$, pa je

$$x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x^3 + \frac{1}{x^3} = 70.$$ 5 bodova

Uz supstituciju $x + \frac{1}{x} = y$ dobivamo

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{tj.} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \quad \text{i} \\ y^3 &= x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \quad \text{tj.} \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} y + (y^2 - 2) + (y^3 - 3y) &= 70, \quad \text{tj.} \\ y^3 + y^2 - 2y - 72 &= 0, \\ y^2(y-4) + 5y(y-4) + 18(y-4) &= 0, \\ (y-4)(y^2 + 5y + 18) &= 0, \quad (y^2 + 5y + 18 > 0), \\ \Rightarrow \quad y &= 4, \\ x + \frac{1}{x} &= 4, \\ x^2 - 4x + 1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

20 bodova

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Županijsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002.

IV. razred

1. Odredite skup svih središta kružnica koje izvana dodiruju kružnice

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{i} \qquad (x-5)^2 + y^2 = 4.$$

2. Ivica mjeri svoju visinu na kraju svake školske godine. Do kraja osmog razreda osnovne škole visina je rasla kao aritmetički niz, a od tada kao geometrijski niz. Dokažite da Ivica u prvom razredu osnovne škole nije bio viši od 120 cm, ako je na kraju sedmog razreda imao 154 cm, na kraju prvog razreda srednje škole 165 cm, a na kraju trećeg razreda srednje škole 176 cm.

Napomena. Nije dozvoljeno koristiti kalkulator!

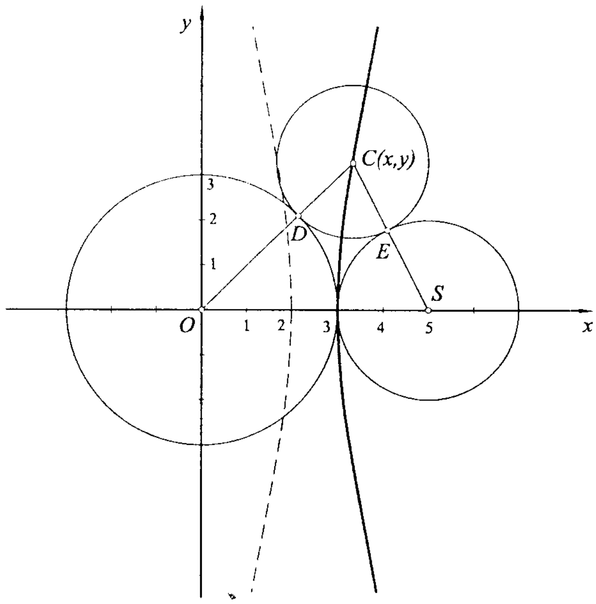
3. Na matematičkom natjecanju sudjelovalo je devet učenika. Odredite koliko je zadataka postavljeno, ako su svaki zadatak riješila točno tri učenika i ako za svaki par učenika postoji točno jedan zadatak koji su oboje riješili.

4. Nađite sve funkcije $f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ za koje vrijedi

$$f(x)^{f(y)} = f(x^y), \quad \text{za svako } x, y > 0.$$

Rješenja zadataka za IV. razred.
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Neka je $C(x, y)$ središte kružnice koja izvana dodiruje dane kružnice, (vidi sliku). Središta danih kružnica su $O = (0, 0)$ i $S = (5, 0)$.



Tada imamo

$$\begin{aligned}
|CD| &= |CO| - |DO| = \sqrt{x^2 + y^2} - 3, \\
|CE| &= |CS| - |ES| = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} - 2, \\
|CD| &= |CE|,
\end{aligned}$$

10 bodova

odakle slijedi

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + y^2} - 3 &= \sqrt{(x-5)^2 + y^2} - 2, \\
\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} &= 1, \quad /^2 \\
x^2 + y^2 - 5x + 12 &= \sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 10x + 25)}, \quad /^2 \\
24x^2 - 120x - y^2 + 144 &= 0, \\
24\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - y^2 &= 6.
\end{aligned}$$

Traženi skup središta je desni dio hiperbole čija je ovo jednadžba. 15 bodova

2. Na kraju prvog razreda osnovne škole Ivica je bio visok x, a na kraju sedmog razreda, $x + 6d = a$. Na kraju prvog razreda srednje škole bio je visok $q(x + 7d) = b$, a na kraju trećeg razreda $q^3(x + 7d) = c$. Dakle, treba izračunati x iz sistema jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + 6d &= a, &(1)\\ q(x+7d) &= b, &(2)\\ q^3(x+7d) &= c, &(3) \end{aligned}$$

ako je $a = 154$ cm, $b = 165$ cm i $c = 176$ cm. 5 bodova

Dijeljenjem jednadžbe (3) s (2) dobiva se

$$q^2 = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Odavde slijedi

$$\begin{aligned} x + 7d &= \frac{b}{q} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \quad / \cdot \frac{6}{7}\\ \frac{6x}{7} + 6d &= \frac{6b\sqrt{b}}{7\sqrt{c}} \qquad (4) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ i } (4) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7}x = a - \frac{6b\sqrt{b}}{7\sqrt{c}}, \quad \text{tj.} \quad x = 7a - \frac{6b\sqrt{b}}{\sqrt{c}}.$$

15 bodova

Treba pokazati da je $x \le 120$, tj.

$$7 \cdot 154 - \frac{6 \cdot 165\sqrt{165}}{\sqrt{176}} \le 120 \quad \Leftrightarrow \quad 1\,078 - \frac{6 \cdot 15 \cdot 11\sqrt{15 \cdot 11}}{\sqrt{16 \cdot 11}} \le 120$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{6 \cdot 15 \cdot 11\sqrt{15}}{4} \le -958 \quad \Leftrightarrow \quad 495\sqrt{15} \ge 1916 \quad /^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 245\,025 \cdot 15 \ge 3\,671\,056 \quad \Leftrightarrow \quad 3\,675\,375 \ge 3\,671\,056.$$

Kako je posljednja nejednakost točna, vrijedi i polazna. 5 bodova

3. *Prvo rješenje.* Pretpostavimo da je neki od učenika (npr. Ivica) riješio n zadataka. Svaki od tih zadataka riješilo je osim Ivice još dvoje učenika, dakle ukupno $2n$ učenika. S druge strane svaki od 8 učenika, različitih od Ivice, riješio je točno jedan od "Ivičinih" zadataka, pa je $2n = 8$, tj. $n = 4$. Dakle, svaki učenik riješio je točno 4 zadatka. Ako s x označimo ukupan broj zadataka, vrijedi

$$3 \cdot x = 9 \cdot 4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 12.$$

25 bodova

Drugo rješenje. Brojimo na dva načina trojke (U_1, U_2, Z), pri čemu su U_1 i U_2 dva učenika koji su riješili zadatak Z. Za svaki izbor (U_1, U_2) postoji točno jedan Z, pa trojki ima $9 \cdot 8 = 72$. S druge strane, bilo koji zadatak Z riješilo je troje učenika, od kojih možemo izabrati par (U_1, U_2) na 6 načina. Prema tome, trojki ima $6x$, gdje je x ukupan broj zadataka. Slijedi $6x = 72$, odakle je $x = 12$. 25 bodova

4. Uočimo da funkcija $f(x) = 1$ za svako $x > 0$ zadovoljava uvjete zadatka. 2 boda

Nadalje, lako se vidi da funkcija $f(x) = x$ također zadovoljava uvjete zadatka. 2 boda

Pretpostavimo da je $f(a) \neq 1$ za neki $a > 0$. Tada je

$$f(a)^{f(xy)} = f(a^{xy}) = f((a^x)^y) = f(a^x)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)}$$

$$\Rightarrow \quad f(xy) = f(x)f(y), \quad \text{za svaki } x, y > 0, \qquad (1)$$

jer je $f(a) \neq 1$. 4 boda

Nadalje,

$$f(a)^{f(x+y)} = f(a^{x+y}) = f(a^x a^y) = f(a^x)f(a^y)$$
$$= f(a)^{f(x)} f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)}$$
$$\Rightarrow \quad f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{za svaki } x, y > 0, \qquad (2)$$

jer je $f(a) \neq 1$. 4 boda

Iz (1) slijedi

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)^2 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1.$$

Odavde i iz (2) proizlazi

$$f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = n, \quad \text{za svaki } n \in \mathbf{N}.$$ 4 boda

Na kraju,

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot n = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f(n) = f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) = f(m) = m$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}, \quad \text{za svaki } m, n \in \mathbf{N}.$$ 4 boda

Pretpostavimo sada da je $f(x) \neq x$ za neki $x > 0$.

Promatrajmo najprije slučaj $f(x) < x$. Tada postoji pozitivan racionalan broj $\frac{m}{n}$ takav da je $f(x) < \frac{m}{n} < x$ pa vrijedi:

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n} + \left(x - \frac{m}{n}\right)\right) = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(x - \frac{m}{n}\right) > f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n},$$

a ovo je u suprotnosti s pretpostavkom. Analogno se promatra slučaj $f(x) > x$. U tom slučaju postoji $\frac{m}{n}$ takav da je $f(x) > \frac{m}{n} > x$ pa je

$$\frac{m}{n} = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\left(\frac{m}{n} - x\right) + x\right) = f\left(\frac{m}{n} - x\right) + f(x) > f(x),$$

što je opet u suprotnosti s pretpostavkom. 5 bodova

Stoga postoje samo dvije funkcije koje zadovoljavaju uvjete zadatka:

$$f(x) = 1 \quad \text{i} \quad f(x) = x.$$