

MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE  
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

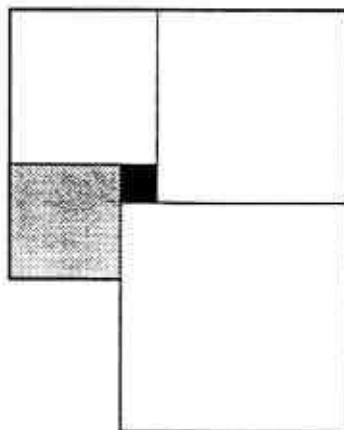
MATEMATIKA

Županijsko natjecanje učenika  
osnovnih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002. godine

Zadaci za 4. razred

1. Lukina majka tri je puta starija od Luke, a Lukin je otac četiri godine stariji od Lukine majke. Svo troje zajedno imaju 88 godina.  
Koliko godina ima Luka, koliko njegova majka, a koliko otac?
2. Koliko se četveroznamenastih brojeva s međusobno različitim znamenkama može sastaviti od znamenaka 1, 2, 3 i 4, tako da se znamenka 1 nalazi lijevo od znamenke 4, ali ne nužno neposredno ispred nje?
3. U papirnici su bilježnice pakirane u pakete, od kojih svaki sadrži 3 ili 4 bilježnice. Koliko paketa od 3, a koliko od 4 bilježnice treba kupiti da svaki od 35 učenika 4.b razreda dobije točno jednu bilježnicu? Pronađi sva rješenja!
4. Lik je sastavljen od pet kvadrata, kao na slici. Duljina stranice crnog kvadrata iznosi 1 cm, a duljina stranice osjenčanog kvadrata jednaka je 3 cm.  
Izračunaj opseg tog lika.



5. Zadan je jednakokrani trokut  $ABC$ , s krakovima  $\overline{AC}$  i  $\overline{BC}$  duljine 75 cm i osnovicom  $\overline{AB}$  duljine 90 cm. Na kraku  $\overline{BC}$  odabrana je točka  $D$ , tako da opseg trokuta  $ABD$  iznosi 216 cm, a opseg trokuta  $ADC$  jednak je 168 cm.  
Koliko su duljine dužina  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BD}$  i  $\overline{CD}$ ?

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 4. RAZRED

20.10.2002.

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE SU DANI NEKI OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. 1. način. Odnose između godina starosti Luke i njegovih roditelja možemo prikazati grafički:



3 BODA

Budući da zajedno imaju 88 godina, vrijedi

4 = 88.

2 BODA

odakle je  = 88 - 4, tj.  = 84,

1 BOD

odnosno  $7 \cdot \text{$  = 84.

1 BOD

Odavde je  $\text{$  = 84 : 7, tj.  $\text{$  = 12.

1 BOD

Dakle, Luka ima 12 godina, njegova majka  $3 \cdot 12 = 36$  godina, a otac  $36 + 4 = 40$  godina.

1 BOD

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. način. Označimo broj Lukinih godina sa  $x$ .

1 BOD

Tada Lukina majka ima  $3x$  godina,

1 BOD

a Lukin otac 4 godine više od nje, tj.  $3x + 4$  godine.

1 BOD

Budući da svi zajedno imaju 88 godina, vrijedi  $x + 3x + 3x + 4 = 88$ ,

2 BODA

odnosno  $7x + 4 = 88$ .

1 BOD

Odavde je  $7x = 88 - 4$ , tj.  $7x = 84$ .

1 BOD

Zato je  $x = 84 : 7$ , odnosno  $x = 12$ .

1 BOD

Dakle, Luka ima 12 godina, njegova majka  $3 \cdot 12 = 36$  godina,

1 BOD

dok Lukin otac ima  $36 + 4 = 40$  godina.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. 1. način. Pronaći ćemo sve četveroznamenkaste brojeve s traženim svojstvom. Prvo trebamo napraviti plan po kojem ćemo ih tražiti, kako neki od brojeva ne bismo propustili. Uočavamo da se znamenka 1 može nalaziti na prvom, drugom, trećem ili četvrtom mjestu slijeva, tj. može biti znamenka tisućica, stotica, desetica ili jedinica. Zato razlikujemo četiri slučaja:

2 BODA

(a) Znamenka 1 je znamenka tisućica, tj. broj je oblika 1 \_ \_ \_ . Budući da je 1 ovdje prva znamenka slijeva, znamenka 4 može se nalaziti na bilo kojem od tri mjesta naznačena crticom, tj. može biti znamenka stotica, znamenka desetica ili znamenka jedinica. Svi brojevi traženog oblika u ovom su slučaju 1234, 1243, 1324, 1342, 1423 i 1432, tj. ima ih 6.

2 BODA

(b) Znamenka 1 je znamenka stotica, tj. broj je oblika \_ 1 \_ \_ . Ovdje je 1 druga znamenka slijeva, pa 4 može biti samo znamenka desetica ili znamenka jedinica, dok znamenka tisućica može biti samo 2 ili 3. To svojstvo imaju jedino brojevi 2134, 2143, 3124, 3142, kojih je 4.

2 BODA

(c) Znamenka 1 je znamenka desetica, tj. broj je oblika \_ \_ 1 \_ . U ovom je slučaju 1 treća znamenka slijeva, pa 4 može biti samo znamenka jedinica, dok znamenka tisućica i znamenka stotica mogu biti 2 ili 3. Traženi brojevi tog oblika su 2314 i 3214, tj. samo su 2 takva broja.

2 BODA

(d) Znamenka 1 je znamenka jedinica, tj. broj je oblika \_ \_ \_ 1. Očito niti jedan broj ovog oblika nema traženo svojstvo.

Konačno, brojeva s traženim svojstvom ima ukupno  $6 + 4 + 2 = 12$ .

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Prema broju pronađenih brojeva rješavanje zadatka treba bodovati kao u sljedećoj tablici:

Pronađeno brojeva	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bodovi	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	8

Za točno prebrojane sve tražene brojeve učenik dobiva 2 boda

2. način. Zadatak se može riješiti primjenom osnovnih principa kombinatorike. Znamenka 1 može se nalaziti na prvom, drugom, trećem ili četvrtom mjestu slijeva, tj. može biti znamenka tisućica, stotica, desetica ili jedinica. Prema tome razlikujemo četiri slučaja:

(a) Znamenka 1 je znamenka tisućica. Ovdje je 1 prva znamenka slijeva, pa se nalazi lijevo od znamenke 4, bez obzira na njeno mjesto. Dakle, znamenka stotica može biti bilo koja od znamenaka 2, 3 ili 4, tj. možemo je izabrati na 3 načina. Nakon što smo izabrali znamenku stotica, znamenka desetica može biti bilo koja od preostalih neupotrijebljenih znamenaka, tj. možemo je izabrati na 2 načina. Preostalu znamenku staviti ćemo na jedino slobodno mjesto, tj. na mjesto znamenke jedinica, koju, prema tome, možemo izabrati na samo jedan način. Konačno, odgovarajući troznamenkasti završetak broja 1 \_\_\_ \_\_ možemo napisati na  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  načina, tj. u ovom slučaju postoji 6 brojeva s traženim svojstvom. **2 BODA**

(b) Znamenka 1 je znamenka stotica. Sada je 1 druga znamenka slijeva, pa 4 ne može biti znamenka tisućica, nego samo znamenka desetica ili jedinica. To znači da znamenku tisućica možemo odabrati na 2 načina (to je znamenka 2 ili 3). Nakon što smo odabrali znamenku tisućica, znamenka desetica može biti bilo koja od preostale dvije znamenke, tj. možemo je odabrati na 2 načina. Znamenka jedinica opet je jedina preostala znamenka, tj. za nju imamo samo jedan izbor. Dakle, traženih brojeva oblika \_\_\_ 1 \_\_\_ \_\_ ima  $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ . **2 BODA**

(c) Znamenka 1 je znamenka desetica. Ovdje je 1 treća znamenka slijeva, pa 4 može biti jedino znamenka jedinica. Znamenke tisućica i stotica stoga mogu biti samo 2 ili 3, te znamenku tisućica možemo izabrati na 2 načina, a nakon nje znamenku stotica na samo jedan način. Iz toga zaključujemo da samo 2 broja oblika \_\_\_ \_\_ 1 \_\_ imaju traženo svojstvo. **2 BODA**

(d) Znamenka 1 je znamenka jedinica. Ovaj slučaj ne može nastupiti jer je 1 prva znamenka zdesna

Uvažavajući svih slučajeva, traženih brojeva ima ukupno  $6 + 4 + 2 = 12$ . **2 BODA**

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. Označimo li sa  $a$  broj paketa od 4 bilježnice, ukupan broj bilježnica spakiranih u takve pakete je  $4a$ . **1 BOD**

Prema tome, preostalih  $35 - 4a$  bilježnica treba biti spakirano u pakete od 3 bilježnice, što je moguće jedino ako pri dijeljenju broja  $35 - 4a$  sa 3 ne dobijemo ostatak, tj. ostatak je 0. **1 BOD**

Koeficijent pri dijeljenju broja  $35 - 4a$  sa 3 u tom je slučaju jednak broju paketa od 3 bilježnice. **1 BOD**

U skladu s tim, da je jasno da ćemo sve mogućnosti ispitati uzimamo li za  $a$  redom 0, 1, 2, ..., što prikazujemo tablicom: **1 BOD**

$a$	$4a$	$35 - 4a$	$(35 - 4a) : 3$	Je li rješenje?
0	$4 \cdot 0 = 0$	$35 - 0 = 35$	$35 : 3 = 11$ i ostatak 2	Ne.
1	$4 \cdot 1 = 4$	$35 - 4 = 31$	$31 : 3 = 10$ i ostatak 1	Ne.
2	$4 \cdot 2 = 8$	$35 - 8 = 27$	$27 : 3 = 9$	Da.
3	$4 \cdot 3 = 12$	$35 - 12 = 23$	$23 : 3 = 7$ i ostatak 2	Ne.
4	$4 \cdot 4 = 16$	$35 - 16 = 19$	$19 : 3 = 6$ i ostatak 1	Ne.
5	$4 \cdot 5 = 20$	$35 - 20 = 15$	$15 : 3 = 5$	Da.
6	$4 \cdot 6 = 24$	$35 - 24 = 11$	$11 : 3 = 3$ i ostatak 2	Ne.
7	$4 \cdot 7 = 28$	$35 - 28 = 7$	$7 : 3 = 2$ i ostatak 1	Ne.
8	$4 \cdot 8 = 32$	$35 - 32 = 3$	$3 : 3 = 1$	Da.

..... **3 BODA**

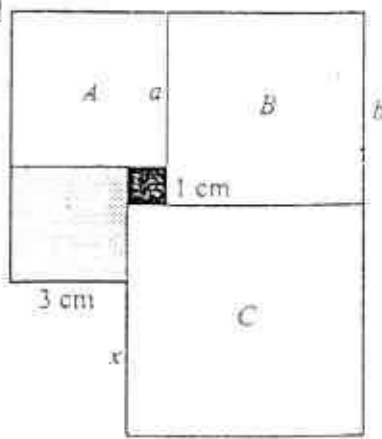
Uzmemo li  $a = 9$ , dobijemo da je broj bilježnica spakiranih u pakete od 4 bilježnice jednak  $4 \cdot 9 = 36$ , što je više od potrebnog broja bilježnica. To znači da smo ispitati sve mogućnosti. **1 BOD**

Dakle, zadatak ima tri rješenja, tj. 35 bilježnica moguće je spakirati na sljedeća tri načina: u 2 paketa od 4 bilježnice i 9 paketa od 3 bilježnice; u 5 paketa od 4 bilježnice i 5 paketa od 3 bilježnice; ili u 8 paketa od 4 bilježnice i 1 paket od 3 bilježnice. **2 BODA**

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena. Svako ispisano rješenje bez objašnjenja nosi 2 boda, tj. za točno ispisana sva tri rješenja bez naznake postupka učenik dobiva 6 bodova

4.



Za izračunavanje opsega lika na slici potrebno je znati duljine stranica svih kvadrata od kojih je sastavljen, tj. izračunati one duljine stranica koje su nepoznate. **1 BOD**

Označimo nepoznate kvadrate redom slovima A, B i C, kao na slici, a duljine njihovih stranica redom sa  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

Duljinu  $a$  stranice kvadrata A možemo odrediti direktno iz poznatih duljina stranica crnog i osjenčanog kvadrata, te je  $a = 1 + 3 = 4$  cm. **1 BOD**

Duljinu  $b$  stranice kvadrata B sada analogno odredimo iz duljina stranica crnog kvadrata i kvadrata A, tj.  $b = 1 + a = 1 + 4 = 5$  cm. **1 BOD**

Na isti način postupimo i u slučaju kvadrata C, čiju duljinu stranice  $c$  dobijemo iz duljine  $b$  stranice kvadrata B i duljine stranice crnog kvadrata, tj.  $c = 1 + b = 1 + 5 = 6$  cm. **1 BOD**

Za određivanje opsega danog lika potrebno je odrediti još i duljinu  $x$ , označenu na slici. Vidimo da je  $x$  razlika duljina desne i lijeve okomite stranice tog lika. Duljina lijeve okomite stranice lika jednaka je zbroju duljina stranice osjenčanog kvadrata i kvadrata  $A$ , tj. iznosi  $3 + 4 = 7$  cm. 1 BOD

Na isti način zaključujemo da je duljina desne okomite stranice lika jednaka zbroju duljina stranica kvadrata  $B$  i  $C$ , tj. iznosi  $5 + 6 = 11$  cm. 1 BOD

Zato je  $x = 11 - 7 = 4$  cm. 1 BOD

Opseg lika jednak je zbroju duljina svih njegovih stranica, odnosno

$$O = 3 + 3 + a + a + b + b + c + c + x = 2 \cdot 3 + 2 \cdot a + 2 \cdot b + 2 \cdot c + x \quad 2 \text{ BODA}$$

$$= 6 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 4 = 6 + 8 + 10 + 12 + 4 = 40 \text{ cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

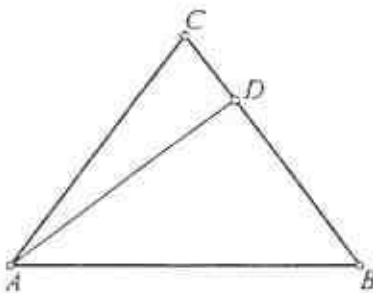
Dakle, opseg danog lika je 40 cm

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Duljinu  $x$  mogli smo odrediti i na drugi način. Najprije odredimo razliku duljina stranica osjenčanog i crnog kvadrata. Ona iznosi  $3 - 1 = 2$  cm. 1 BOD

Sada je duljina  $x$  jednaka razlici duljine  $c$  stranice kvadrata  $C$  i dobivene duljine, tj.  $x = 6 - 2 = 4$  cm. 2 BODA

5.



Skica. 1 BOD

Izračunajmo prvo opseg trokuta  $ABC$ , tj.  $O(ABC)$ . On je jednak

$$O(ABC) = |AB| + |BC| + |AC| = 90 + 75 + 75 = 240 \text{ cm.} \quad 1 \text{ BOD}$$

Sada ćemo izračunati duljinu dužine  $\overline{AD}$ , koristeći pritom poznate opsege trokuta  $ABC$ ,  $ABD$  i  $ADC$ , tj.  $O(ABC)$ ,  $O(ABD)$  i  $O(ADC)$ . Vrijedi:

$$O(ABD) = |AB| + |BD| + |AD|$$

i

$$O(ADC) = |AD| + |CD| + |AC|. \quad 1 \text{ BOD}$$

Također je i  $|BC| = |BD| + |CD|$ . 1 BOD

pa imamo

$$O(ABD) + O(ADC) = |AB| + |BD| + |AD| + |AD| + |CD| + |AC|$$

$$= |AB| + |BD| + |CD| + |AC| + 2|AD|$$

$$= |AB| + |BC| + |AC| + 2|AD| = O(ABC) + 2|AD|. \quad 2 \text{ BODA}$$

Uvrstimo li poznate veličine u ovaj izraz, dobivamo  $216 + 168 = 240 + 2|AD|$ , tj.  $384 = 240 + 2|AD|$ , i odatle je dalje  $144 = 2|AD|$ , odnosno  $|AD| = 144 : 2 = 72$  cm. 2 BODA

Duljinu dužine  $\overline{BD}$  sada lagano izračunamo iz opsega  $O(ABD)$  jer je  $216 = 90 + |BD| + 72$ , odakle je  $216 = 162 + |BD|$ , tj.  $|BD| = 216 - 162 = 54$  cm. 1 BOD

Konačno, duljinu  $|CD|$  odredit ćemo iz poznatih duljina dužina  $\overline{BC}$  i  $\overline{BD}$ . Vrijedi jednakost  $75 = 54 + |CD|$ , odakle je  $|CD| = 75 - 54 = 21$  cm. 1 BOD

Prema tome,  $|AD| = 72$  cm,  $|BD| = 54$  cm i  $|CD| = 21$  cm.

..... UKUPNO 10 BODOVA