

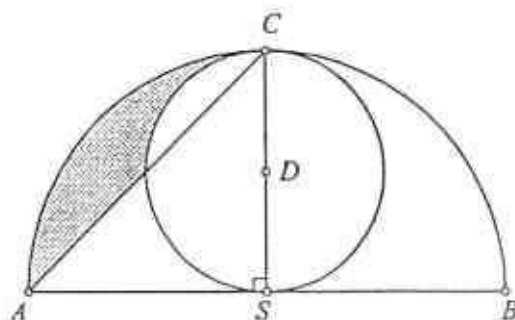
MATEMATIKA

Županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002. godine

Zadaci za 8. razred

1. Izračunaj vrijednost izraza $2\sqrt{245} + \frac{1}{6}\sqrt{58^2 - 22^2} - 30\sqrt{1.8}$.
2. Dokaži da je $5^{2002} + 7^{2002} + 9^{2n}$ djeljivo s 5 za svaki prirodni broj n .
3. Na koliko načina prodavač može točno izvagati glavicu kupusa mase 1.67 kg ako na raspolaganju ima samo utege masa 20 g i 50 g?
4. Dana je dužina \overline{AB} duljine 16. Nad tom je dužinom kao promjerom konstruirana polukružnica. U tu je polukružnicu upisana kružnica radijusa $|DS| = 4$, koja dužinu \overline{AB} dodiruje u njezinom polovištu S , a polukružnicu u točki C (vidi sliku). Nakon toga je povučena tetiva \overline{AC} . Dokaži da je površina osjenčanog dijela na slici jednaka $12\pi - 24$.



5. Dan je kvadrat $ABCD$. Ako je točka M polovište stranice \overline{AD} , točka N polovište stranice \overline{CD} , a točka P presjek dužina \overline{BN} i \overline{CM} , onda je $|AP| = |AB|$. Dokaži.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 8. RAZRED

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE SU DANI NEKI OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. Najprije ćemo pojednostavniti svaki od članova izraza u zadatku, tj. pojednostavniti druge korijene koji se u njima pojavljuju. Imamo

$$2\sqrt{245} = 2\sqrt{49 \cdot 5} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 2\sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5} = 14\sqrt{5}, \quad 1 \text{ BOD}$$

$$\frac{1}{6}\sqrt{58^2 - 22^2} = \frac{1}{6}\sqrt{(58 - 22) \cdot (58 + 22)} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{36 \cdot 80} = \frac{1}{6}\sqrt{36} \cdot \sqrt{80} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \sqrt{16 \cdot 5} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$30\sqrt{1.8} = 30\sqrt{\frac{18}{10}} = 30\sqrt{\frac{9}{5}} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 30 \cdot \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = 30 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 30 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \quad 1 \text{ BOD}$$

$$= 30 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = 18\sqrt{5}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Vrijednost zadanog izraza odavde je

$$2\sqrt{245} + \frac{1}{6}\sqrt{58^2 - 22^2} - 30\sqrt{1.8} = 14\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 18\sqrt{5} = 0. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je n proizvoljan prirodni broj. Budući da je broj 5^{2002} djeljiv s 5, 1 BOD
 da bi zbroj $5^{2002} + 7^{2002} + 9^{2n}$ bio djeljiv s 5 treba dokazati da je $7^{2002} + 9^{2n}$ djeljivo s 5. 1 BOD
 Znamo da je neki broj djeljiv s 5 ako mu je znamenka jedinica ili 0 ili 5. To nas upućuje da pogledamo znamenku jedinica zbroja $7^{2002} + 9^{2n}$, što ćemo učiniti tako da otkrijemo znamenku jedinica svakog od pribrojnika. 1 BOD
 Pronađimo najprije znamenku jedinica broja 7^{2002} . U tu svrhu pogledajmo redom znamenke jedinica potencija broja 7, tj. brojeva 7^k , $k = 1, 2, 3, \dots$. Dobijemo tablicu:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Znamenka jedinica od 7^k	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9	3	1	...

1 BOD

Primijetimo da se znamenke jedinica periodički ponavljaju u grupama po četiri, i to redosljedom: 7, 9, 3, 1. 1 BOD
 Budući da je $2002 = 4 \cdot 500 + 2$, zaključujemo da je znamenka jedinica broja 7^{2002} druga po redu u grupi, tj. jednaka je 9. 1 BOD
 Sada pronadimo znamenku jedinica broja 9^{2n} . Prema svojstvu potenciranja imamo $9^{2n} = (9^2)^n = 81^n$. 1 BOD
 Znamenka jedinica broja 81 jednaka je 1, pa je jasno da i svaka njegova potencija ima to isto svojstvo. Prema tome, znamenka jedinica broja 81^n je 1. 1 BOD
 Kako su znamenke jedinica brojeva 7^{2002} i 9^{2n} redom 9 i 1, znamenka jedinica njihovog zbroja jednaka je 0. 1 BOD
 Dakle, zbroj $7^{2002} + 9^{2n}$ je djeljiv s 5 (čak i sa 10), te je i izraz $5^{2002} + 7^{2002} + 9^{2n}$ djeljiv s 5. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

3. 1. način. Neka je x broj utega od 20 g, a y broj utega od 50 g potrebnih da bi se točno izvagala masa od 1.67 kg, odnosno 1670 g. Tada mora vrijediti jednakost $20x + 50y = 1670$, što je ekvivalentno s $2x + 5y = 167$. 1 BOD
 Odavde je $2x = 167 - 5y$, što možemo pisati u obliku $2x = 166 + 1 - 4y - y = 2 \cdot (83 - 2y) + 1 - y$. 2 BODA
 Uočimo da je lijeva strana jednakosti $2x = 2 \cdot (83 - 2y) + 1 - y$ paran broj (djeljiva je s 2). Da bi takva bila i desna strana, $1 - y$ također mora biti djeljivo s 2, tj. mora biti oblika $1 - y = 2k$, gdje je k neki cijeli broj. 2 BODA
 Sada je $y = 1 - 2k$, te uvrštavanjem natrag u prethodnu jednakost dobivamo da je $2x = 162 + 10k$, odnosno $x = 81 + 5k$ za neki cijeli broj k . 2 BODA
 Budući da je $x \geq 0$, očito mora biti $k \geq -16$. 1 BOD
 Analogno, zbog $y \geq 0$ broj k mora zadovoljavati uvjet $k \leq 0$. 1 BOD
 Dakle, sve moguće vrijednosti od k su $k = -16, -15, -14, \dots, -1, 0$, tj. ima ih 17. 1 BOD
 To znači da postoji točno 17 različitih načina da se masa od 1.67 kg precizno izvaže pomoću utega od 20 g i 50 g.

Konkretno, ti su načini dani tablicom:

k	-1	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	81
y	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

..... UKUPNO 10 BODOVA

2. način. Opet sa x označimo broj utega od 20 g, a sa y broj utega od 50 g potrebnih za točno vaganje mase od 1.67 kg, tj. od 1670 g. Opet vrijedi jednakost $20x + 50y = 1670$, odnosno $2x + 5y = 167$, što možemo zapisati i u obliku $5y = 167 - 2x$. Kako je po pretpostavci $x \geq 0$ i $168 = 2 \cdot 84$, uočavamo da mora biti $0 \leq x \leq 83$.
 Nadalje, kako je lijeva strana jednakosti $5y = 167 - 2x$ djeljiva s 5, to mora vrijediti i za njenu desnu stranu. Budući da je broj $2x$ paran, njegova znamenka jedinica je 0, 2, 4, 6 ili 8. Tada je znamenka jedinica broja $167 - 2x$ jedna od znamenaka 7, 5, 3, 1 ili 9. No, zbog djeljivosti tog broja s 5, njegova znamenka jedinica sada može biti jedino 5, što znači da je znamenka jedinica broja $2x$ jednaka 2, iz čega dalje slijedi da je znamenka jedinica broja x ili 1 ili 6. Takvih prirodnih brojeva manjih od 83 ima 17, pa zaključujemo da postoji 17 načina na koje se masa od 1.67 kg može izvagati pomoću utega od 20 g i 50 g. Svi mogući načini dani su tablicom u 1. načinu rješavanja.

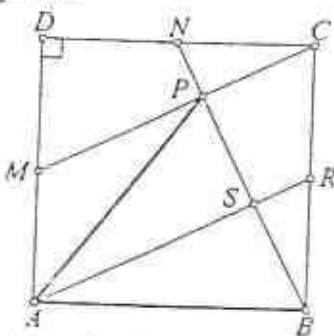
..... UKUPNO 10 BODOVA

4. Primijetimo odmah da je $R = |AS| = |SC| = 8$ radijus polukruga, a $r = |DS| = |DC| = 4$ radijus kruga na slici uz tekst zadatka. Neka je P_1 površina kružnog isječka ASC radijusa R . Tada je $P_1 = \frac{R^2\pi}{4} = \frac{8^2\pi}{4} = 16\pi$.
 Također, površina pravokutnog trokuta ASC iznosi $P(ASC) = \frac{|AS| \cdot |SC|}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$.
 te je površina P_2 kružnog odsječka nad tetivom \overline{AC} polukruga jednaka $P_2 = P_1 - P(ASC) = 16\pi - 32$.
 Označimo li sa P_3 površinu polukruga (polovine kruga) polumjera r , vrijedi $P_3 = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{4^2\pi}{2} = 8\pi$.
 Neka je točka E presjek kružnice polumjera r i tetive \overline{AC} . Prema Talesovom poučku slijedi da je $\sphericalangle SEC = 90^\circ$. Budući da je trokut ASC jednakokratan, a dužina \overline{SE} visina iz vrha S na osnovicu \overline{AC} tog trokuta, zaključujemo da je $|AE| = |EC|$. Zbog toga je $\overline{ED} \parallel \overline{AS}$, pa je $\sphericalangle EDC = 90^\circ$. Prema tome, trokut EDC je jednakokratan i pravokutan.
 Za površinu P_4 kružnog isječka EDC polumjera r vrijedi $P_4 = \frac{P_3}{2} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi$, dok je površina pravokutnog trokuta EDC jednaka $P(EDC) = \frac{|DE| \cdot |DC|}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.
 Zato površina P_5 kružnog odsječka nad tetivom \overline{EC} u krugu polumjera r iznosi $P_5 = P_4 - P(EDC) = 4\pi - 8$.
 Konačno, tražena površina P je $P = P_2 - P_5 = 16\pi - 32 - (4\pi - 8) = 12\pi - 24$, što je i trebalo dokazati.

..... UKUPNO 10 BODOVA

5. Skica

1 BOD



Primijetimo najprije da je $\triangle BCN \cong \triangle CDM$, jer vrijede jednakosti $|BC| = |CD|$, $|CN| = |DM|$ i $\sphericalangle BCN = \sphericalangle CDM$.
 Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $\sphericalangle BNC = \sphericalangle CMD$.
 Sada gledamo trokute CNP i CDM . Zbog $\sphericalangle BNC = \sphericalangle PNC = \sphericalangle CMD$ i zajedničkog kuta $\sphericalangle PCN = \sphericalangle MCD$, ti trokuti imaju dva para jednakih kutova. No, tada im je i treći par kutova jednak, tj. vrijedi jednakost $\sphericalangle CPN = \sphericalangle CDM = 90^\circ$.
 Označimo sa R polovište dužine \overline{BC} , odnosno neka je $|BR| = |CR|$. Zbog $AM \parallel CR$ i $|AM| = |CR|$ zaključujemo da je četverokut $ARCM$ paralelogram, tj. da je $AR \parallel MC$. Iz $BN \perp CM$ sada slijedi i da je $BN \perp AR$.

2 BODA

Neka je točka S presjek dužina \overline{AR} i \overline{BN} . Kako je $|BR| = |CR|$ i $RS \parallel CP$, dužina \overline{RS} je srednjica trokuta BCP . Zato je $|BS| = |PS|$.
 Prema tome, pravac AR je simetrala dužine \overline{BP} , pa prema poučku o simetrali dužine slijedi da je $|AP| = |AB|$, što je i trebalo dokazati.

2 BODA

..... UKUPNO 10 BODOVA