MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Županijsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske

25. ožujka 2002. godine

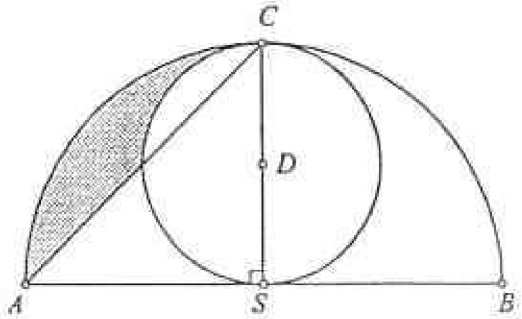
Zadaci za 8. razred

1. Izračunaj vrijednost izraza $2\sqrt{245}+\frac{1}{6}\sqrt{58^2-22^2}-30\sqrt{1.8}$.

2. Dokaži da je $5^{2002}+7^{2002}+9^{2n}$ djeljivo s 5 za svaki prirodni broj n.

3. Na koliko načina prodavač može točno izvagati glavicu kupusa mase 1.67 kg ako na raspolaganju ima samo utege masa 20 g i 50 g?

4. Dana je dužina $\overline{AB}$ duljine 16. Nad tom je dužinom kao promjerom konstruirana polukružnica. U tu je polukružnicu upisana kružnica radijusa $|DS|=4$, koja dužinu $\overline{AB}$ dodiruje u njezinom polovištu S, a polukružnicu u točki C (vidi sliku). Nakon toga je povučena tetiva $\overline{AC}$. Dokaži da je površina osjenčanog dijela na slici jednaka $12\pi-24$.



5. Dan je kvadrat $ABCD$. Ako je točka M polovište stranice $\overline{AD}$, točka N polovište stranice $\overline{CD}$, a točka P presjek dužina $\overline{BN}$ i $\overline{CM}$, onda je $|AP|=|AB|$. Dokaži.

ŽUP 2002.

RJEŠENJA ZADATAKA ZA 8. RAZRED

ZA SVAKI OD ZADATAKA OVDJE SU DANI NEKI OD MOGUĆIH NAČINA RJEŠAVANJA. UKOLIKO JE UČENIK ZADATAK RJEŠAVAO NA DRUGAČIJI NAČIN, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE ADEKVATNO BODOVATI I OCIJENITI NJEGOV RAD.

1. Najprije ćemo pojednostavniti svaki od članova izraza u zadatku, tj. pojednostavniti druge korijene koji se u njima pojavljuju. Imamo

$$2\sqrt{245} = 2\sqrt{49 \cdot 5} \qquad \text{1 BOD}$$
$$= 2\sqrt{49} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{5} = 14\sqrt{5}, \qquad \text{1 BOD}$$
$$\frac{1}{6}\sqrt{58^2 - 22^2} = \frac{1}{6}\sqrt{(58-22)\cdot(58+22)} \qquad \text{1 BOD}$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{36 \cdot 80} = \frac{1}{6}\sqrt{36} \cdot \sqrt{80} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \sqrt{16 \cdot 5} \qquad \text{1 BOD}$$
$$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \qquad \text{1 BOD}$$

i

$$30\sqrt{1.8} = 30\sqrt{\frac{18}{10}} = 30\sqrt{\frac{9}{5}} \qquad \text{1 BOD}$$
$$= 30 \cdot \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = 30 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \text{1 BOD}$$
$$= 30 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \qquad \text{1 BOD}$$
$$= 30 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5} = 18\sqrt{5}. \qquad \text{1 BOD}$$

Vrijednost zadanog izraza odavde je

$$2\sqrt{245} + \frac{1}{6}\sqrt{58^2 - 22^2} - 30\sqrt{1.8} = 14\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 18\sqrt{5} = 0. \qquad \text{1 BOD}$$

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Neka je n proizvoljan prirodni broj. Budući da je broj 5^{2002} djeljiv s 5, 1 BOD
da bi zbroj $5^{2002} + 7^{2002} + 9^{2n}$ bio djeljiv s 5 treba dokazati da je $7^{2002} + 9^{2n}$ djeljivo s 5. 1 BOD
Znamo da je neki broj djeljiv s 5 ako mu je znamenka jedinica ili 0 ili 5. To nas upućuje da pogledamo znamenku jedinica zbroja $7^{2002} + 9^{2n}$, što ćemo učiniti tako da otkrijemo znamenku jedinica svakog od pribrojnika. 1 BOD
Pronađimo najprije znamenku jedinica broja 7^{2002}. U tu svrhu pogledajmo redom znamenke jedinica potencija broja 7, tj. brojeva 7^k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Dobijemo tablicu:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
Znamenka jedinica od 7^k	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9	3	1	...

1 BOD

Primijetimo da se znamenke jedinica periodički ponavljaju u grupama po četiri, i to redoslijedom: 7, 9, 3, 1. 1 BOD
Budući da je $2002 = 4 \cdot 500 + 2$, zaključujemo da je znamenka jedinica broja 7^{2002} druga po redu u grupi, tj. jednaka je 9. 1 BOD
Sada pronađimo znamenku jedinica broja 9^{2n}. Prema svojstvu potenciranja imamo $9^{2n} = (9^2)^n = 81^n$. 1 BOD
Znamenka jedinica broja 81 jednaka je 1, pa je jasno da i svaka njegova potencija ima to isto svojstvo. Prema tome, znamenka jedinica broja 81^n je 1. 1 BOD
Kako su znamenke jedinica brojeva 7^{2002} i 9^{2n} redom 9 i 1, znamenka jedinica njihovog zbroja jednaka je 0. 1 BOD
Dakle, zbroj $7^{2002} + 9^{2n}$ je djeljiv s 5 (čak i sa 10), te je i izraz $5^{2002} + 7^{2002} + 9^{2n}$ djeljiv s 5. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. <u>1. način.</u> Neka je x broj utega od 20 g, a y broj utega od 50 g potrebnih da bi se točno izvagala masa od 1.67 kg, odnosno 1670 g. Tada mora vrijediti jednakost $20x + 50y = 1670$, što je ekvivalentno s $2x + 5y = 167$. 1 BOD
Odavde je $2x = 167 - 5y$, što možemo pisati u obliku $2x = 166 + 1 - 4y - y = 2 \cdot (83 - 2y) + 1 - y$. 2 BODA
Uočimo da je lijeva strana jednakosti $2x = 2 \cdot (83 - 2y) + 1 - y$ paran broj (djeljiva je s 2). Da bi takva bila i desna strana, $1 - y$ također mora biti djeljivo s 2, tj. mora biti oblika $1 - y = 2k$, gdje je k neki cijeli broj. 2 BODA
Sada je $y = 1 - 2k$, te uvrštavanjem natrag u prethodnu jednakost dobivamo da je $2x = 162 + 10k$, odnosno $x = 81 + 5k$, za neki cijeli broj k. 2 BODA
Budući da je $x \geq 0$, očito mora biti $k \geq -16$. 1 BOD
Analogno, zbog $y \geq 0$ broj k mora zadovoljavati uvjet $k \leq 0$. 1 BOD
Dakle, sve moguće vrijednosti od k su $k = -16, -15, -14, \ldots, -1, 0$, tj. ima ih 17. 1 BOD
To znači da postoji točno 17 različitih načina da se masa od 1.67 kg precizno izvaže pomoću utega od 20 g i 50 g.

Konkretno, ti su načini dani tablicom:

k	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
x	1	6	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	81
y	33	31	29	27	25	23	21	19	17	15	13	11	9	7	5	3	1

.... UKUPNO 10 BODOVA

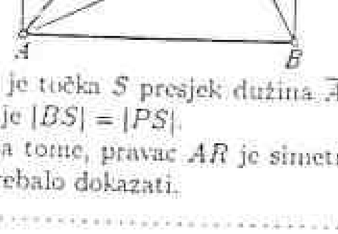
2. način. Opet sa x označimo broj utega od 20 g, a sa y broj utega od 50 g potrebnih za točno vaganje mase od 1.67 kg, tj. od 1670 g. Opet vrijedi jednakost $20x + 50y = 1670$, odnosno $2x + 5y = 167$, 1 BOD
što možemo zapisati i u obliku $5y = 167 - 2x$. Kako je po pretpostavci $x \geq 0$ i $168 = 2 \cdot 84$, uočavamo da mora biti $0 \leq x \leq 83$. 1 BOD
Nadalje, kako je lijeva strana jednakosti $5y = 167 - 2x$ djeljiva s 5, to mora vrijediti i za njenu desnu stranu. 1 BOD
Budući da je broj $2x$ paran, njegova znamenka jedinica je 0, 2, 4, 6 ili 8. 1 BOD
Tada je znamenka jedinica broja $167 - 2x$ jedna od znamenaka 7, 5, 3, 1 ili 9. 1 BOD
No, zbog djeljivosti tog broja s 5, njegova znamenka jedinica sada može biti jedino 5, 1 BOD
što znači da je znamenka jedinica broja $2x$ jednaka 2, 1 BOD
iz čega dalje slijedi da je znamenka jedinica broja x ili 1 ili 6. 1 BOD
Takvih prirodnih brojeva manjih od 83 ima 17, 1 BOD
pa zaključujemo da postoji 17 načina na koje se masa od 1.67 kg može izvagati pomoću utega od 20 g i 50 g. 1 BOD
Svi mogući načini dani su tablicom u 1. načinu rješavanja.

.... UKUPNO 10 BODOVA

$\boxed{4.}$ Primijetimo odmah da je $R = |AS| = |SC| = 8$ radijus polukruga, a $r = |DS| = |DC| = 4$ radijus kruga na slici uz tekst zadatka. Neka je P_1 površina kružnog isječka ASC radijusa R. Tada je $P_1 = \frac{R^2\pi}{4} = \frac{8^2\pi}{4} = 16\pi$. 1 BOD
Također, površina pravokutnog trokuta ASC iznosi $P(ASC) = \frac{|AS| \cdot |SC|}{2} = \frac{8 \cdot 8}{2} = 32$, 1 BOD
te je površina P_2 kružnog odsječka nad tetivom $\overline{AC}$ polukruga jednaka $P_2 = P_1 - P(ASC) = 16\pi - 32$. 1 BOD
Označimo li sa P_3 površinu polukruga (polovine kruga) polumjera r, vrijedi $P_3 = \frac{r^2\pi}{2} = \frac{4^2\pi}{2} = 8\pi$. 1 BOD
Neka je točka E presjek kružnice polumjera r i tetive $\overline{AC}$. Prema Talesovom poučku slijedi da je $\sphericalangle SEC = 90°$. Budući da je trokut ASC jednakokračan, a dužina $\overline{SE}$ visina iz vrha S na osnovicu $\overline{AC}$ tog trokuta, zaključujemo da je $|AE| = |EC|$. Zbog toga je $\overline{ED} \parallel \overline{AS}$, pa je $\sphericalangle EDC = 90°$. Prema tome, trokut EDC je jednakokračan i pravokutan. 2 BODA
Za površinu P_4 kružnog isječka EDC polumjera r vrijedi $P_4 = \frac{P_3}{2} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi$, 1 BOD
dok je površina pravokutnog trokuta EDC jednaka $P(EDC) = \frac{|DE| \cdot |DC|}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$. 1 BOD
Zato površina P_5 kružnog odsječka nad tetivom $\overline{EC}$ u krugu polumjera r iznosi $P_5 = P_4 - P(EDC) = 4\pi - 8$ 1 BOD
Konačno, tražena površina P je $P = P_2 - P_5 = 16\pi - 32 - (4\pi - 8) = 12\pi - 24$, što je i trebalo dokazati. 1 BOD

.... UKUPNO 10 BODOVA

$\boxed{5.}$ Skica 1 BOD



Primijetimo najprije da je $\triangle BCN \cong \triangle CDM$, jer vrijede jednakosti $|BC| = |CD|$, $|CN| = |DM|$ i $\sphericalangle BCN = \sphericalangle CDM$. 1 BOD
Iz dokazane sukladnosti slijedi da je $\sphericalangle BNC = \sphericalangle CMD$. 1 BOD
Sada gledamo trokute CNP i CDM. Zbog $\sphericalangle BNC = \sphericalangle PNC = \sphericalangle CMD$ i zajedničkog kuta $\sphericalangle PCN = \sphericalangle MCD$, ti trokuti imaju dva para jednakih kutova. No, tada im je i treći par kutova jednak, tj. vrijedi jednakost $\sphericalangle CPN = \sphericalangle CDM = 90°$. 1 BOD
Označimo sa R polovište dužine $\overline{BC}$, odnosno neka je $|BR| = |CR|$. Zbog $AM \parallel CR$ i $|AM| = |CR|$ zaključujemo da je četverokut $ARCM$ paralelogram, tj. da je $AR \parallel MC$. Iz $BN \perp CM$ sada slijedi i da je $BN \perp AR$. 2 BODA
Neka je točka S presjek dužina $\overline{AR}$ i $\overline{BN}$. Kako je $|BR| = |CR|$ i $RS \parallel CP$, dužina $\overline{RS}$ je srednjica trokuta BCP. Zato je $|BS| = |PS|$. 2 BODA
Prema tome, pravac AR je simetrala dužine $\overline{BP}$, pa prema poučku o simetrali dužine slijedi da je $|AP| = |AB|$, što je i trebalo dokazati. 2 BODA

.... UKUPNO 10 BODOVA