ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

Pula, 7. - 10. svibnja 2003. godine

I. razred

1. Dokažite da trokut čije su duljine stranica prosti brojevi ne može imati cjelobrojnu površinu.

2. Produkt pozitivnih realnih brojeva x, y i z jednak je 1. Ako je

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+y+z ,$$

dokažite da je

$$\frac{1}{x^k}+\frac{1}{y^k}+\frac{1}{z^k} \geq x^k+y^k+z^k ,$$

za svaki prirodan broj k.

3. U jednakokračnom trokutu duljina osnovice je a, duljina kraka b, duljina visine na osnovicu v, pri čemu vrijedi: $\frac{a}{2}+v \geq b\sqrt{2}$. Odredite kutove trokuta. Kolika je površina trokuta ako je $b=8\sqrt{2}$?

4. Koliko ima djelitelja broja 30^{2003} koji nisu djelitelji broja 20^{2000}?

Rješenja za I. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Površina trokuta sa stranicama a, b, c dana je, prema Heronovoj formuli, s $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, gdje je $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Uz oznaku $o = a+b+c$, ovo možemo zapisati sa

$$16P^2 = o(o-2a)(o-2b)(o-2c)\,.$$

Desna strana mora biti parna, pa o, također, mora biti paran. Moguće su dvije mogućnosti:

1° Svi a, b, c su parni;

2° jedna stranica je parna a druge dvije neparne.

1° Kako su a, b, c parni i prosti, mora biti $a = b = c = 2$, tj. $P = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \notin \mathbf{N}$.

2° Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je $a = 2$, a b i c su neparni. Kad bi bilo $b \neq c$, možemo uzeti $b < c$, pa je $c - b \geq 2$, tj. $c \geq b + 2 = b + a$, što je u suprotnosti s nejednakošću trokuta. Dakle, $b = c$. Kako je $o = 2 + 2b$ imamo:

$$\begin{aligned} 16P^2 &= o(o-4)(o-2b)^2 \\ 16P^2 &= (2+2b)(2b-2)\cdot 4, \end{aligned}$$

odakle je

$$b^2 - P^2 = 1 \qquad \text{tj.} \qquad (b-P)(b+P) = 1,$$

što, zbog $b + P \geq 2$, nije moguće.

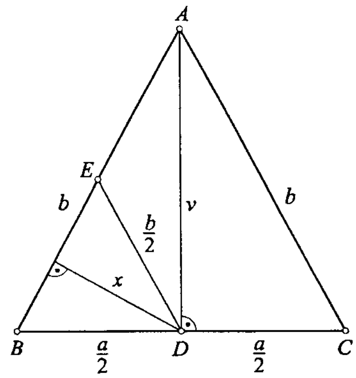
2. Sređivanjem, koristeći uvjete zadatka, dobivamo

$$\begin{aligned} (x-1)(y-1)(z-1) &= xyz - xy - yz - zx + x + y + z - 1 \\ &= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + x + y + z - 1 \leq 0\,. \end{aligned}$$

Za svaki prirodan broj k je $x^k > 1$ ako i samo ako je $x > 1$ i $x^k < 1$ ako i samo ako je $x < 1$. Isto vrijedi za y^k i z^k. Dakle,

$$\begin{aligned} (x-1)(y-1)(z-1) &\leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \\ (x^k-1)(y^k-1)(z^k-1) &\leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \\ x^ky^kz^k - x^ky^k - y^kz^k - z^kx^k + x^k + y^k + z^k - 1 &\leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \\ x^k + y^k + z^k &\leq \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k}\,. \end{aligned}$$

3. Neka je promatrani trokut ABC kao na slici.



Iz

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 = b^2 \qquad (*)$$

primjenom $K \geq A$ nejednakosti slijedi

$$\frac{a^2}{4} + v^2 \geq \frac{\left(\frac{a}{2} + v\right)^2}{2}$$

tj.

$$2b^2 \geq \left(\frac{a}{2} + v\right)^2 .$$

Uz zadanu nejednakost iz toga slijedi $\frac{a}{2} + v = b\sqrt{2}$, tj. $v = b\sqrt{2} - \frac{a}{2}$. Odavde slijedi

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - b\right)^2 = 0 , \quad \text{tj.} \quad b = \frac{a}{2}\sqrt{2} .$$

Odavde slijedi da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 45°$, tj. trokut ABC je jednakokračan pravokutan kojemu je $\overline{BC}$ hipotenuza.

Tada je $P = \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}(8\sqrt{2})^2 = 64$.

4. *Prvo rješenje.* Rastavimo tražene brojeve na proste faktore:

$$30^{2003} = 2^{2003} \cdot 3^{2003} \cdot 5^{2003}, \qquad 20^{2000} = 2^{4000} \cdot 5^{2000}.$$

Djelitelja broja 30^{2003} ima 2004^3. Od tog broja treba oduzeti broj djelitelja broja $M(30^{2003}, 20^{2000}) = 2^{2003} \cdot 5^{2000}$, a on iznosi $2004 \cdot 2001$.

Traženi broj, dakle, iznosi $2004^3 - 2004 \cdot 2001$.

Drugo rješenje. Brojevi koji su djelitelji broja 30^{2003}, a nisu djelitelji broja 20^{2000} su oblika:

a) $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, $\quad k, m = 0, 1, 2, \ldots, 2003$, $\quad l = 1, 2, \ldots, 2003$;

b) $2^k \cdot 5^m$, $\quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2003$, $\quad m = 2001, 2002, 2003$.

Brojeva pod a) ima $2004^2 \cdot 2003$, a brojeva pod b) $2004 \cdot 3$. Ukupno je takvih brojeva

$$2004^2 \cdot 2003 + 2004 \cdot 3 = 2004^3 - 2004 \cdot 2001.$$

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Pula, 7. – 10. svibnja 2003. godine

II. razred

1. Nađite sve parove realnih brojeva (x, y) za koje vrijedi

$$(2x+1)^2 + y^2 + (y-2x)^2 = \frac{1}{3}\,.$$

2 Točka M je unutar kvadrata $ABCD$. Označimo s A_1, B_1, C_1, D_1 druge točke presjeka pravaca AM, BM, CM, DM, tim redom, s kružnicom opisanom kvadratu $ABCD$. Dokažite da je

$$|A_1B_1| \cdot |C_1D_1| = |A_1D_1| \cdot |B_1C_1|\,.$$

3. Za pozitivne brojeve $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$, $n \geq 2$ označimo $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s$. Dokažite nejednakost

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}\,.$$

4. Koliko najmanje brojeva može imati skup A prirodnih brojeva od kojih je najmanji jednak 1, najveći 100, i ima svojstvo da je svaki broj iz A, osim 1, jednak zbroju dva (jednaka ili različita) broja iz A?

Rješenja za II. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Nakon sređivanja danu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$3y^2 - 6xy + (12x^2 + 6x + 1) = 0 \,. \tag{1}$$

Ovu jednadžbu promatramo kao kvadratnu jednadžbu po y, pa mora biti $D \geq 0$, tj.

$$0 \leq D = 36x^2 - 12(12x^2 + 6x + 1) = -12(9x^2 + 6x + 1) = -12(3x + 1)^2 \,,$$

odakle je $3x + 1 = 0$, tj. $x = -\dfrac{1}{3}$. Uvrštavanjem u (1) dobiva se

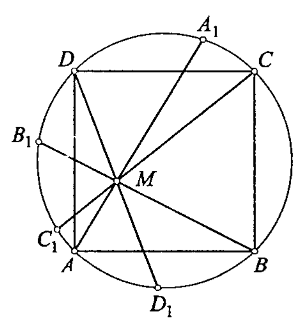
$$3y^2 + 2y + \frac{1}{3} = 0 \,.$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobiva se $y = -\dfrac{1}{3}$. Dakle, postoji samo jedan par traženih brojeva, $(x, y) = \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

2. Kako je $\triangle ABM \sim \triangle B_1A_1M$, $\triangle BCM \sim \triangle C_1B_1M$, $\triangle CDM \sim \triangle D_1C_1M$, $\triangle DAM \sim \triangle A_1D_1M$, dobivamo

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BM|}{|A_1M|}, \qquad \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|BM|}{|C_1M|},$$

$$\frac{|CD|}{|C_1D_1|} = \frac{|DM|}{|C_1M|}, \qquad \frac{|DA|}{|D_1A_1|} = \frac{|DM|}{|A_1M|} \,.$$



Odavde slijedi

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} \cdot \frac{|CD|}{|C_1D_1|} = \frac{|BM|}{|A_1M|} \cdot \frac{|DM|}{|C_1M|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} \cdot \frac{|DA|}{|D_1A_1|},$$

odakle slijedi $|A_1B_1| \cdot |C_1D_1| = |A_1D_1| \cdot |B_1C_1|$, jer je $|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$.

3. Uvedemo li oznaku $b_k = s - a_k$, dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = (s-a_1) + (s-a_2) + \ldots + (s-a_n) = (n-1)s\,.$$

Sada je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s-a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{b_k} + 1\right) - n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k + b_k}{b_k} - n = \sum_{k=1}^{n} \frac{s}{b_k} - n = s \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} - n\,.$$

Primijenimo nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s-a_k} \geq s \cdot n \sqrt[n]{\frac{1}{b_1} \cdot \frac{1}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b_n}} - n\,.$$

Budući je $b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geq n\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}$,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{b_1} \cdot \frac{1}{b_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{b_n}} \geq n \cdot \frac{1}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}\,.$$

Odavde je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s-a_k} \geq sn \cdot \frac{n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = s \cdot \frac{n^2}{(n-1)s} - n = \frac{n}{n-1}\,,$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{s-a_k} \geq \frac{n}{n-1}\,.$$

4. Neka je $1 = k_1 < k_2 < \ldots < k_n = 100$. I uvjeta je $k_{i+1} \leq 2k_i$ za svaki i. Odavde je

$$100 = k_n \leq 2k_{n-1} \leq 2^2 k_{n-2} \leq \ldots \leq 2^{n-1} k_1 = 2^{n-1}\,.$$

Prema tome, $n \geq 8$. Pokažimo da ne može biti $n = 8$.

Zaista, ako je $k_8 = 100$, onda iz $k_7 + k_6 \leq 64 + 32 < 100$, slijedi $k_8 = 2k_7$, tj. $k_7 = 50$. Sada iz $k_6 + k_5 \leq 32 + 16 < 50$, slijedi $k_6 = 25$. No sada je $k_5 + k_4 \leq 16 + 8 < 25$, i $2k_5 \neq 25$, pa se k_6 ne može dobiti kao zbroj dva broja iz A.

Za $n = 9$ ima više mogućih izbora skupova s traženim svojstvima, npr. $\{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ i $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 36, 64, 100\}$.

Stoga skup A može imati najmanje 9 brojeva.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Pula, 7. – 10. svibnja 2003. godine

III. razred

1. U trokutu ABC je $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$.

a) Ako je $\alpha = 3\beta$, dokažite da je $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$.

b) Da li vrijedi obrat? Obrazložite!

2. Dokažite jednakost

$$\left\lfloor \frac{n(n+1)}{4n-2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor ,$$

za svaki prirodan broj $n > 2$.

3. Svi bridni kutovi pri vrhu D tetraedra $ABCD$ jednaki su α, a kutovi između dviju strana tetraedra kojima je jedan vrh D jednaki su φ. Dokažite da postoji točno jedan kut α za koji je $\varphi = 2\alpha$.

4. Imamo 8 kockica duljine brida 1 čije su 24 strane obojene plavo, a preostalih 24 crveno. Dokažite da se od tih kockica može složiti kocka $(2 \times 2 \times 2)$ na čijem oplošju će biti jednak broj plavih i crvenih kvadrata (1×1).

Rješenja za III. razred
Svaki zadatak vrijedi 25 bodova.

1. a) Kutovi trokuta su β, $\alpha = 3\beta$ i $\gamma = 180^\circ - 4\beta$. Prema poučku o sinusima imamo

$$\frac{\sin(3\beta)}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin(180^\circ - 4\beta)}{c} = \frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbf{R}^+,$$

odnosno

$$a = k\sin(3\beta), \qquad b = k\sin\beta, \qquad c = k\sin(4\beta)$$

Dovoljno je provjeriti jednakost

$$(\sin^2(3\beta) - \sin^2\beta)(\sin(3\beta) - \sin\beta) = \sin\beta\sin^2(4\beta),$$

tj.

$$\begin{aligned}(\sin(3\beta) + \sin\beta)(\sin(3\beta) - \sin\beta)^2 &= \sin\beta\sin^2(4\beta),\\ 2\sin(2\beta)\cos\beta \cdot 4\cos^2(2\beta)\sin^2\beta &= \sin\beta \cdot 4\sin^2(2\beta)\cos^2(2\beta),\end{aligned}$$

što se lako provjeri.

b) Obrat ne vrijedi. Dovoljno je pokazati da postoji neki trokut za koji vrijedi jednakost $(a^2 - b^2)(a - b) = bc^2$, ali ne vrijedi $\alpha = 3\beta$. Možemo uzeti α, β i γ (npr. $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 125^\circ$ i $\gamma = 40^\circ$), takve da je $\alpha = 3\beta - 360^\circ$, a da je $\sin\alpha = \sin(3\beta)$. Vrijedi $(a^2 - b^2)(c - b) = bc^2$.

2. Iz

$$\frac{n(n+1)}{4n-2} = \frac{n+1}{4} + \frac{n+1}{4(2n-1)} < \frac{n+1}{4} + \frac{1}{4}, \text{ za } n > 2, \tag{1}$$

slijedi

$$\frac{n+1}{4} < \frac{n(n+1)}{4n-2} \quad \text{tj.} \quad \left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor \le \left\lfloor\frac{n(n+1)}{4n-2}\right\rfloor. \tag{2}$$

Dokažimo još

$$\frac{n(n+1)}{4n-2} < \left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor + 1 \tag{3}$$

Promotrimo ove slučajeve.

a) Za $n = 4k + r, \quad r = 0, 1, 2$ je

$$\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor + 1 = k + 1 > \frac{n+1}{4} + \frac{1}{4},$$

pa nejednakost slijedi zbog (1).

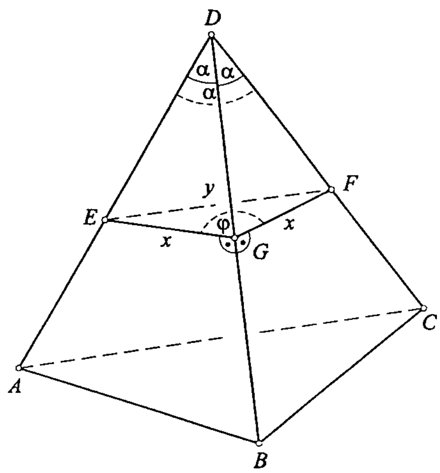
b) Za $n = 4k + 3$ je

$$\left\lfloor\frac{n+1}{4}\right\rfloor + 1 = k + 2 > k + 1 + \frac{1}{4} = \frac{n+1}{4} + \frac{1}{4},$$

pa nejednakost vrijedi zbog (1). U oba slučaja vrijedi (3).

Iz (2) i (3) slijedi tražena jednakost.

3. Neka su na bridovima $\overline{DA}$ i $\overline{DC}$ točke E i F, takve da je $|DE| = |DF| = 1$. Nožišta okomica iz točaka E i F na pravac BD je točka G. Prema definiciji kuta između dviju ravnina je $\varphi = \sphericalangle EGF$.



Označimo li $|GE| = |GF| = x$, $|EF| = y$, tada je $\sin\alpha = x$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{2x}$. Odavde je

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Kako je $\varphi = 2\alpha$, to je $2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} = 1$, odakle se dobije

$$4\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1, \quad 4\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1, \quad 4\sin^3\frac{\alpha}{2} - 4\sin\frac{\alpha}{2} + 1 = 0.$$

Stavimo li $t = \sin\frac{\alpha}{2}$, posljednja jednadžba prelazi u $4t^3 - 4t + 1 = 0$. (1)

Budući da je $0 < \varphi < \pi$, to je $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, ili $0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Zbog toga je dovoljno pokazati da jednadžba (1) ima točno jedno rješenje u intervalu $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Promatrajmo sada funkciju $f(t) = 4t^3 - 4t + 1$.

Vrijedi: $f(0) = 1 > 0$ i $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 1 = 1 - \sqrt{2} < 0$.

Kako je $f(t)$ polinom na skupu realnih brojeva, iz $f(0) > 0$ i $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$, zaključujemo da f ima (barem) jednu nultočku na intervalu $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Treba još pokazati da je to i jedina nultočka na tom intervalu.

Iz $f(-2) = -32 + 8 + 1 = -23 < 0$ i $f(0) > 0$, vidimo da je druga nultočka promatrane funkcije u intervalu $(-2, 0)$.

Isto tako, zbog $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ i $f(1) > 0$, treća nultočka te funkcije je u intervalu $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

Budući da polinom trećeg stupnja može imati jednu ili tri realne nultočke, slijedi da jednadžba (1) ima točno jedno rješenje u intervalu $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. To znači da postoji samo jedan kut α za koji je $\varphi = 2\alpha$.

4. Složimo proizvoljnu $2 \times 2 \times 2$ kocku i neka na njezinom oplošju ima m plavih i n bijelih kvadrata ($m \geq n$). Ako je $m = n$ onda smo gotovi, a u protivnom označimo s $d = m - n > 0$. Pritom je d paran broj jer je $m + n = 24$ pa je $d = m + n - 2n = 24 - 2n = 2(12 - n)$.

Promotrimo sljedeće poteze.

Rotacijom kockice oko jedne njezine osi za $90°$, točno jedna strana postane nevidljiva, a time neka druga postane vidljiva. Pritom d ostane jednak ili se promijeni za 2.

Koristeći tri ovakve rotacije možemo kockicu okrenuti tako da sve tri vidljive strane postanu nevidljive i obratno. Ako ovo napravimo sa svim kockicama, vidljive će postati sve nevidljive strane, a to je n plavih i m crvenih. Dakle, novi $d' = n - m = -d$.

Prema tome, kako se uzastopnim rotacijama d mijenja za 2 ili 0, a kako smo postigli da d promijeni predznak, i uz to je d paran, to znači da u jednom trenutku d sigurno mora biti jednak nuli, što smo i trebali dokazati.

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za Državno natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

Pula, 7. – 10. svibnja 2003. godine

IV. razred

1. Neka je I točka na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$ trokuta ABC, a M i N redom točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, takve da je $\sphericalangle ABI = \sphericalangle NIC$ i $\sphericalangle ACI = \sphericalangle MIB$.

Dokažite da je I središte upisane kružnice trokuta ABC ako i samo ako su točke M, N i I kolinearne.

2. Niz realnih brojeva $(a_n)_{n\geq 0}$ ima svojstvo da za sve $m \geq n \geq 0$ vrijedi

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}) .$$

Odredite a_{2003} ako je $a_1 = 1$.

3. Prirodni brojevi od 1 do 2003 poredani su u niz. Na nizu vršimo ovu operaciju: ako je prvi broj u nizu jednak k, okrenemo poredak prvih k brojeva. Dokazati da se nakon konačno uzastopnih primjena ove operacije broj 1 pojavi na prvom mjestu, nezavisno od početnog rasporeda.

4. Dokažite da je

$$\binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

djeljivo s p, za svaki prost broj p i svaki prirodan broj $n \geq p$.

Rješenja za IV. razred
Svaki zadatak vrijedi po 25 bodova.

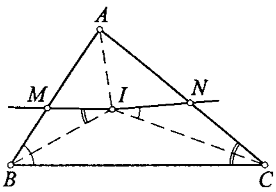
1. Neka je I središte upisane kružnice. Tada je

$$\sphericalangle NIC = \sphericalangle ABI = \frac{\beta}{2} \qquad \text{i} \qquad \sphericalangle MIB = \sphericalangle ACI = \frac{\gamma}{2} ,$$

te $\sphericalangle BIC = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$, odakle odmah slijedi

$$\sphericalangle MIN = \sphericalangle MIB + \sphericalangle BIC + \sphericalangle CIN = 180^\circ ,$$

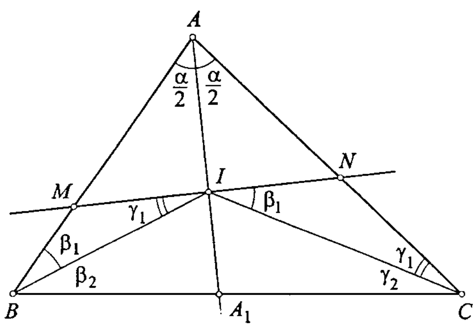
tj. točke M, N i I su kolinearne.



Pretpostavimo sada da su točke M, N i I kolinearne. Neka je

$$\sphericalangle ABI = \sphericalangle NIC = \beta_1 , \quad \sphericalangle CBI = \beta_2 = \beta - \beta_1 ,$$

$$\sphericalangle ACI = \sphericalangle MIB = \gamma_1 , \quad \sphericalangle BCI = \gamma_2 = \gamma - \gamma_1 .$$



Neka je A_1 točka u kojoj simetrala AI kuta $\sphericalangle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$. Vrijedi

$$\sphericalangle BIA_1 = \sphericalangle ABI + \sphericalangle BAI = \beta_1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Slično je $\sphericalangle CIA_1 = \gamma_1 + \frac{\alpha}{2}$, pa je $\sphericalangle BIC = \alpha + \beta_1 + \gamma_1$. Stoga je

$$\sphericalangle MIN = \gamma_1 + (\alpha + \beta_1 + \gamma_1) + \beta_1 = \alpha + 2\beta_1 + 2\gamma_1 .$$

Kako je

$$\sphericalangle MIN = 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta_1 + \beta_2) + (\gamma_1 + \gamma_2) ,$$

slijedi $\beta_1 + \gamma_1 = \beta_2 + \gamma_2 = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$. Konačno je

$$\sphericalangle BIC = \alpha + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ.$$

Jedine dvije točke T na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$ za koje vrijedi $\sphericalangle BTC = \frac{\alpha}{2} + 90^\circ$ su središta upisane i središte pripisane kružnice. Kako se samo prva od njih nalazi unutar trokuta, slijedi da je I središte upisane kružnice. (I je unutar trokuta jer su M i N na stranicama trokuta ABC.)

2. Uvrstimo li $m = n$, dobivamo $a_{2m} + a_0 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2m})$, tj. $a_0 = 0$.

Za $n = 0$ je $a_m + a_m = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_0)$, tj. $a_{2m} = 4a_m$. (1)

Ako je $m = n + 2$, onda je

$$a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(a_{2n+4} + a_{2n}). \tag{2}$$

Iz (1) slijedi $a_{2n+2} = a_{2(n+1)} = 4a_{n+1}$ i $a_2 = 4a_1 = 4$, pa je

$$a_{2n+2} + a_2 = 4a_{n+1} + 4a_1 = 4(a_{n+1} + 1). \tag{3}$$

S druge strane, iz (2) i (1) imamo

$$a_{2n+2} + a_2 = \frac{1}{2}(4a_{n+2} + 4a_n) = 2a_{n+2} + 2a_n. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) dobijemo rekurzivnu relaciju

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

Možemo riješiti ovu diferencijsku jednadžbu, ali i naslutiti rješenje jer je $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, ... Pretpostavljamo da je $a_n = n^2$. Ovo ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

1° Za $n = 0$ i $n = 1$ tvrdnja vrijedi.

2° Pretpostavimo da je $a_n = n^2$ i $a_{n+1} = (n+1)^2$ za neko $n \geq 0$. Tada je

$$a_{n+2} = 2(n+1)^2 - n^2 + 2 = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2\ .$$

Time je dokaz završen.

Dakle, $a_{2003} = 2003^2$.

3. Dokaz ćemo provesti indukcijom za svaki n.

1° Za $n = 1$ tvrdnja je ispunjena.

2° Neka je $n > 1$ i tvrdnja vrijedi za $n - 1$. Moguća su dva slučaja.

a) n je na zadnjem mjestu. Tada se n ne može pomaknuti jer jedini način da se neki broj pomakne sa zadnjeg mjesta je da n bude na prvom mjestu. Stoga možemo primijeniti pretpostavku indukcije za $n - 1$, i time je tvrdnja dokazana u ovom slučaju.

b) n nije na zadnjem mjestu. U ovom slučaju, ako tokom provođenja operacije n dođe na zadnje mjesto onda opet primijenimo a). To će se dogoditi jedino ako potez prije toga n bude na prvom mjestu. Pokažimo da se ne može dogoditi slučaj kada je n između drugog i $(n-1)$. mjesta i uvijek tamo ostaje. Pretpostavimo suprotno, tj. da je nakon svakog poteza broj n između drugog i $(n-1)$. mjesta. To znači da se s brojem na onom mjestu gdje je bio n nikad nije vršila dana operacija. U tom slučaju možemo pretpostaviti da smo n zamijenili s brojem koji je na početku bio na zadnjem mjestu. I sada ponovo prema pretpostavci indukcije dobijemo broj 1 na prvom mjestu, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Dakle, uvijek se 1 pojavi na prvom mjestu.

4. Označimo s N onaj od brojeva $n,\ n-1,\ \ldots,\ n-p+1$ koji je djeljiv s p. Tada je i $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \frac{N}{p}$, pa imamo

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor &= \frac{n(n-1)\ldots(N+1)N(N-1)\ldots(n-p+1)}{p!} - \frac{N}{p} \\ &= \frac{N}{p!}\left(n(n-1)\ldots(N+1)(N-1)\ldots(n-p+1) - (p-1)!\right). \qquad (*)\end{aligned}$$

Ostaci pri dijeljenju brojeva $n,\ n-1,\ \ldots\ N+1,\ N-1,\ \ldots,\ n-p+1$ s p su brojevi od 1 do $p-1$ (svaki se javlja po jedanput) pa je umnožak

$$n(n-1)\ldots(N+1)(N-1)\ldots(n-p+1) \quad \text{oblika} \quad C \cdot p + (p-1)!$$

za neki prirodan broj C, a to znači da je izraz u zagradi u $(*)$ djeljiv s p, a onda je to i broj

$$A = \frac{n(n-1)\ldots(N+1)N(N-1)\ldots(n-p+1)}{p} - \frac{N(p-1)!}{p}.$$

Kako je p relativno prost s $(p-1)!$ (jer je p prost), tada je i $\binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \frac{1}{(p-1)!} \cdot A$, koji je djeljiv s p.

14