

## MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika  
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2003.

I. razred

1. Jedinica za asfaltiranje sastoji se od određenog broja radnika i pripadne mehanizacije. Tri jedinice asfaltirale su 20 km autoceste za 10 dana. Koliko još jedinica treba uključiti da radovi budu gotovi za 15 dana ako je preostalo 50 km autoceste za asfaltiranje?
2. Dan je jednakokrtačan trokut  $ABC$  kojemu je kut uz vrh  $A$  jednak  $120^\circ$ . Okomica iz tog vrha na krak trokuta dijeli trokut na dva trokuta od kojih tupokutan ima polumjer upisane kružnice 1. Kolika je površina trokuta  $ABC$ ?
3. Odredite sumu

$$\frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{1997 \cdot 2000} + \frac{2}{2000 \cdot 2003} .$$

4. Ako za realne brojeve  $a, b, c$  vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1 ,$$

dokažite da je

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0 .$$

Rješenja zadataka za I. razred.  
Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. *Prvo rješenje.* Neka je  $d$  duljina asfaltirane autoceste,  $x$  broj jedinica koje su bile uključene u asfaltiranje,  $y$  broj dana koji su bili potrebni za asfaltiranje i  $a$  konstanta proporcionalnosti. Tada vrijedi

$$d = a \cdot x \cdot y . \quad 5 \text{ bodova}$$

Tokom prva tri dana asfaltiranja bilo je:  
 $d = 20$ ,  $x = 3$ ,  $y = 10$ , odakle slijedi

$$a = \frac{d}{x \cdot y} = \frac{2}{3} . \quad 10 \text{ bodova}$$

U preostalom dijelu asfaltiranja je:  
 $d = 50$ ,  $y = 15$ , odakle se dobiva

$$x = \frac{d}{a \cdot y} = \frac{50}{\frac{2}{3} \cdot 15} = 5 . \quad 8 \text{ bodova}$$

Treba ukupno 5 jedinica, što znači da treba uključiti još dvije jedinice. 2 boda

*Drugo rješenje.* Prikažimo podatke i međurezultate u obliku tabele:

ideja - 5 bodova

broj jedinica	km	dani
3	20	10
?	50	15
3	20	10
3	10	5
1	10	15
5	50	15

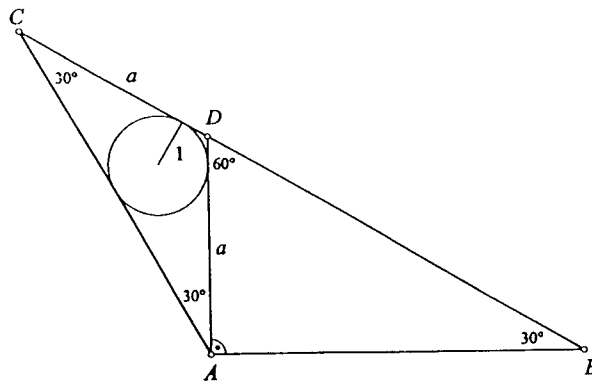
Znamo da više dana znači više km (km i dani su direktno proporcionalni), 2 boda  
pa će 3 jedinice asfaltirati 10 km za 5 dana; 4 boda

broj jedinica i broj dana su obrnuto proporcionalni, 2 boda  
zato će 1 jedinica asfaltirati 10 km za 15 dana; 4 boda

kako je broj jedinica direktno proporcionalan broju km, 2 boda  
5 jedinica će asfaltirati 50 km za 15 dana. 4 boda

Dakle, za asfaltiranje 50 km za 15 dana treba 5 jedinica, a kako su tri već na terenu, treba uključiti još dvije jedinice. 2 boda

2. *Prvo rješenje.* Uz oznaku  $a = |AD| = |CD|$  i  $r = 1$  - polumjer trokutu  $ACD$  upisane kružnice, dobivamo  $|AC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .  
Površina trokuta  $ACD$  jednaka je površini jednakostraničnog trokuta stranice  $a$ , a možemo ju prikazati i pomoću duljina stranica i polumjera upisane kružnice trokuta  $ACD$ .



Dakle,

$$P(ACD) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot r(a + a + a\sqrt{3}), \quad 10 \text{ bodova}$$

tj.

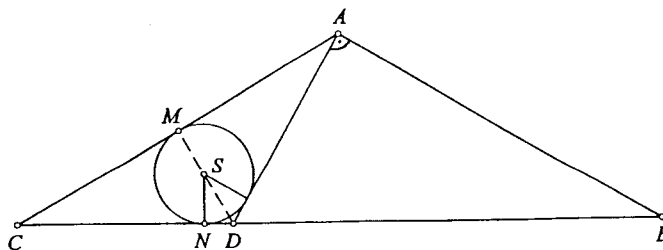
$$a = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}}.$$

Površina trokuta  $ABC$  jednaka je površini jednakostraničnog trokuta stranice  $a\sqrt{3}$ :

$$\begin{aligned} P(ABC) &= \frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &= (2 + \sqrt{3})^2\sqrt{3} = 7\sqrt{3} + 12. \end{aligned}$$

15 bodova

*Drugo rješenje.* Neka je  $S$  središte kružnice upisane u tupokutan trokut  $ACD$ ,  $N$  diralište upisane mu kružnice i stranice  $\overline{CD}$ , a  $M$  diralište te kružnice i stranice  $\overline{AC}$ .



Kutovi trokuta  $SND$  su:  $\sphericalangle N = 90^\circ$  i  $\sphericalangle D = 60^\circ$ , pa je on "polovica jednakostraničnog trokuta". Kako je  $|SN| = 1$ , slijedi  $|SD| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

5 bodova

Odavde slijedi:

$$|MD| = |MS| + |SD| = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}},$$

4 boda

$$|AD| = 2|MD| = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}},$$

4 boda

$$|AM| = |MD|\sqrt{3} = 2 + \sqrt{3},$$

4 boda

$$|AC| = 2|AM| = 2(2 + \sqrt{3}),$$

4 boda

$$P(ABC) = \frac{|AC|^2\sqrt{3}}{4} = (2 + \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 12 + 7\sqrt{3}.$$

4 boda

3. Danu sumu možemo prikazati na ovaj način:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{2}{1997 \cdot 2000} + \frac{2}{2000 \cdot 2003} \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{5-2}{2 \cdot 5} + \frac{8-5}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{2000-1997}{1997 \cdot 2000} + \frac{2003-2000}{2000 \cdot 2003} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2003} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2003} \right) = \frac{667}{2003}. \end{aligned}$$

25 bodova

4. Jednakost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$$

množimo redom s  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i dobivene jednakosti zbrojimo.

10 bodova

Dobiva se

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \\ &= a+b+c - \frac{ab+bc}{c+a} - \frac{ac+bc}{a+b} - \frac{ab+ac}{b+c} \\ &= 0. \end{aligned}$$

15 bodova

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika  
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2003.

II. razred

1. Na skupu realnih brojeva definirana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}}.$$

Odredite  $f(1) + f(2) + \dots + f(2003)$ .

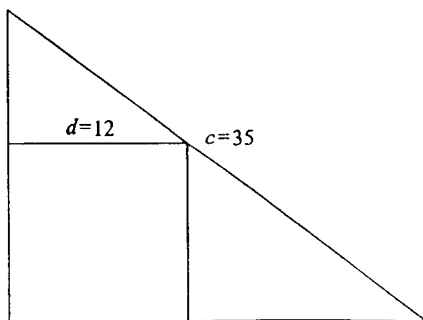
2. U jednakostraničnom trokutu  $ABC$  dane su točke  $D \in \overline{AB}$  i  $E \in \overline{BC}$  takve da je  $|AD| = \frac{1}{3}|AB|$  i  $|BE| = \frac{1}{3}|BC|$ . Pravci  $AE$  i  $CD$  sijeku se u točki  $P$ . Koliki je kut  $\sphericalangle BPC$ ?

3. Neka su  $z_1$  i  $z_2$  kompleksni brojevi modula 1. Dokažite da je

$$\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2}$$

realan broj.

4. U pravokutan trokut s hipotenuzom duljine  $c = 35$  upisan je kvadrat sa stranicom duljine  $d = 12$ , kao na slici. Odredite duljine kateta tog trokuta.



Rješenja zadataka za II. razred.

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Kako je

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (\sqrt[3]{x-1})^3} = \frac{1}{2} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}), \end{aligned}$$

15 bodova

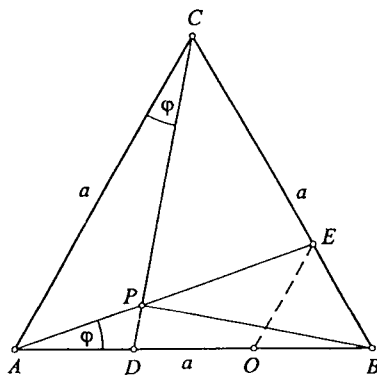
imamo

$$\begin{aligned} &f(1) + f(2) + \dots + f(2002) + f(2003) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{1} + \dots + \sqrt[3]{2003} - \sqrt[3]{2001} + \sqrt[3]{2004} - \sqrt[3]{2002}) \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt[3]{2004} + \sqrt[3]{2003} - 1). \end{aligned}$$

10 bodova

2. Uz oznake kao na slici imamo:

$$\sphericalangle CPE = \sphericalangle PCA + \sphericalangle CAP = \sphericalangle EAB + \sphericalangle CAE = 60^\circ. \quad 5 \text{ bodova}$$



Oдавде је  $\sphericalangle EPD = 120^\circ$ , а како је  $\sphericalangle DBE = 60^\circ$ , четвѐрокут  $DBEP$  је тетивни. Нека је  $O$  половиште дужице  $\overline{BD}$ . Тада је  $|OB| = |OD| = |OE| = \frac{1}{3}a$ , па је  $O$  средиште кружнице описане четвѐрокуту  $DBEP$ .

10 bodova

Зато је

$$\sphericalangle EPB = \frac{1}{2} \sphericalangle EOB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ. \quad 5 \text{ bodova}$$

Traženi kut je

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle CPE + \sphericalangle EPB = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ . \quad 5 \text{ bodova}$$

3. *Prvo rješenje.* Prema uvjetu zadatka je  $1 = |z_1|^2 = z_1 \cdot \bar{z}_1$ ,  
odakle je  $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ . Analogno je  $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$ .

5 bodova

Neka je

$$z = \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2} .$$

Tada je

$$\bar{z} = \frac{1 - \bar{z}_1 \bar{z}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} = \frac{1 - \frac{1}{z_1 z_2}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}} = \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2} . \quad 15 \text{ bodova}$$

Kako je  $\bar{z} = z$ , traženi broj je realan.

5 bodova

*Drugo rješenje.* Stavimo  $z_1 = a + ib$ ,  $z_2 = c + id$ . Zbog  
 $|z_1| = |z_2| = 1$  vrijedi  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ .

5 bodova

Tada je

$$\begin{aligned} \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 - z_2} &= \frac{1 - ac + bd - i(ad + bc)}{(a - c) + i(b - d)} \cdot \frac{(a - c) - i(b - d)}{(a - c) - i(b - d)} \\ &= \frac{a - c - a^2 c + ac^2 + ad^2 - b^2 c}{(a - c)^2 + (b - d)^2} \\ &\quad + \frac{i(b - d + a^2 d - bc^2 + b^2 d - bd^2)}{(a - c)^2 + (b - d)^2} . \end{aligned}$$

15 bodova

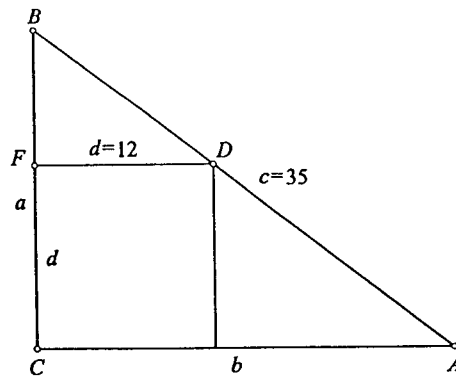
Treba provjeriti da je imaginarni dio jednak nuli:

$$b - d + a^2 d - bc^2 + b^2 d - bd^2 = b - d + d(a^2 + b^2) - b(c^2 + d^2) = b - d + d - b = 0 . \quad 5 \text{ bodova}$$

4. Ako su  $a$  i  $b$  katete i  $c = 35$  hipotenuza, vrijedi

$$a^2 + b^2 = 35^2 = 1225$$

5 bodova



S druge strane, iz sličnosti trokuta  $ABC$  i  $DBF$  dobivamo

$$\frac{a}{b} = \frac{a-d}{d} \implies d(a+b) = ab \quad \text{tj.} \quad 12(a+b) = ab. \quad 5 \text{ bodova}$$

Riješimo sustav  $a^2 + b^2 = 1225$ ,  $12(a+b) = ab$ . Kako je  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ , stavimo  $x = a+b$ ,  $y = ab$ . Tada je

$$x^2 - 2y = 1225, \quad 12x = y \implies x^2 - 24x - 1225 = 0.$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$x_1 = 49, \quad x_2 = -25, \quad \text{i dalje,} \quad y_1 = 588, \quad y_2 = -300.$$

Zadovoljava samo  $x_1 = 49$  i  $y_1 = 588$ .

5 bodova

Sada je  $a+b = 49$  i  $ab = 588$ , pa su  $a$  i  $b$  rješenja kvadratne jednadžbe

$$t^2 - 49t + 588 = 0.$$

Slijedi  $a_1 = 21$ ,  $b_1 = 28$  ili  $a_2 = 28$ ,  $b_2 = 21$ , pa su duljine kateta danog trokuta 21 i 28.

10 bodova



MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika  
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2003.

III. razred

1. Riješite nejednadžbu

$$2 \cdot 125^x - 3 \cdot 50^x - 9 \cdot 20^x + 10 \cdot 8^x \leq 0 .$$

2. Odredite sve parove  $(x, y)$  realnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\operatorname{tg}^2 x + 2y \cos 4x \cdot \operatorname{tg} x + y^2 = 0 .$$

3. U trokutu  $ABC$  duljine stranica su  $|AB| = 20$ ,  $|AC| = 21$  i  $|BC| = 29$ . Točke  $D$  i  $E$  su na stranici  $\overline{BC}$  takve da je  $|BD| = 8$  i  $|EC| = 9$ . Odredite veličinu kuta  $\sphericalangle DAE$ .

4. Ako su  $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$  cijeli brojevi i  $b_1, b_2, \dots, b_{2003}$  ti isti brojevi poredani na neki drugi način, dokažite da je produkt

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_{2003} + b_{2003})$$

paran broj.

Rješenja zadataka za III. razred.

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Podijelimo li jednadžbu s  $8^x$ , dobijemo

$$2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} - 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^x + 10 \leq 0.$$

Supstitucijom  $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$  dobijemo nejednadžbu

$$2t^3 - 3t^2 - 9t + 10 \leq 0. \quad 5 \text{ bodova}$$

Rastavimo lijevu stranu nejednadžbe na faktore:

$$\begin{aligned} 2t^3 - 3t^2 - 9t + 10 &= (2t^3 - 2t^2) - (t^2 - t) - (10t - 10) \\ &= 2t^2(t - 1) - t(t - 1) - 10(t - 1) = (t - 1)(2t^2 - t - 10) \\ &= (t - 1)(2t - 5)(t + 2). \end{aligned}$$

10 bodova

Njezino rješenje je  $t \in (-\infty, -2] \cup \left[1, \frac{5}{2}\right]$ . No, kako je  $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x > 0$ , zadovoljava samo  $\left(\frac{5}{2}\right)^x \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$ . Iz  $1 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^x \leq \frac{5}{2}$  slijedi  $x \in [0, 1]$ .

10 bodova

2. *Prvo rješenje.* Promatrajmo danu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po  $y$ . Tada je

$$y_{1,2} = -\operatorname{tg} x \cdot \cos 4x \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 4x - \operatorname{tg}^2 x}. \quad 5 \text{ bodova}$$

Da bi rješenja bila realna mora biti

$$\operatorname{tg}^2 x (\cos^2 4x - 1) \geq 0,$$

što je moguće samo za  $\operatorname{tg} x = 0$  ili  $\cos^2 4x = 1$ , tj.  $x = k\pi$

ili  $\cos 4x = \pm 1$ , odnosno  $x = \frac{k\pi}{4}$ ,  $y = -\operatorname{tg} x \cdot \cos 4x$ .

4 boda

Za  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} x$  nije definiran.

4 boda

Stoga ostaju slučajevi:

$$x = k\pi \quad \dots \quad y = 0, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad 4 \text{ boda}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \dots \quad y = 1, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad 4 \text{ boda}$$

$$x = k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad \dots \quad y = -1, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad 4 \text{ boda}$$

*Drugo rješenje.* Promatramo li ovu jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu po  $\operatorname{tg} x$ , dobivamo

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2} = -y \cos 4x \pm \sqrt{y^2 \cos^2 4x - y^2}.$$

Da bi rješenja bila realna, mora biti  $y^2(\cos^2 4x - 1) \geq 0$ , a to je moguće samo ako je  $y = 0$  ili  $\cos 4x = \pm 1$ .

5 bodova

$$1^\circ y = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

4 boda

$$2^\circ \cos 4x = 1 \Rightarrow 4x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}:$$

$$\text{a) } k = 2m, m \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = m\pi, m \in \mathbf{Z} \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

4 boda

$$\text{b) } k = 2m + 1, m \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbf{Z},$$

4 boda

$$3^\circ \cos 4x = -1 \Rightarrow 4x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}:$$

$$\text{a) } k = 2m, m \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbf{Z} \Rightarrow$$

$$1^2 + 2y \cdot (-1) \cdot 1 + y^2 = 0 \Rightarrow y = 1.$$

4 boda

$$\text{b) } k = 2m + 1, m \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + m\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} + m\pi, m \in \mathbf{Z}$$

$$\Rightarrow (-1)^2 + 2y \cdot (-1) \cdot (-1) + y^2 = 0 \Rightarrow y = -1.$$

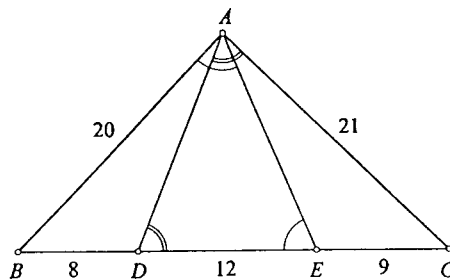
4 boda

$$\text{Dakle, } (x, y) \in \left\{ (m\pi, 0), \left( \frac{\pi}{4} + m\pi, 1 \right), \left( \frac{3\pi}{4} + m\pi, -1 \right) : m \in \mathbf{Z} \right\}.$$

3. *Prvo rješenje.* Uočimo da je trokut pravokutan ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ) jer je  $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 = 29^2$ .  
Kako je  $|AB| = |BE|$  i  $|AC| = |CD|$  slijedi  $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BEA$  i  $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA$ .

5 bodova

5 bodova



Stoga je

$$\begin{aligned} \sphericalangle DAE &= \sphericalangle BAE + \sphericalangle CAD - \sphericalangle BAC \\ &= \sphericalangle BEA + \sphericalangle CDA - \sphericalangle BAC \\ &= \sphericalangle DEA + \sphericalangle EDA - \sphericalangle BAC \\ &= 180^\circ - \sphericalangle DAE - \sphericalangle BAC. \end{aligned}$$

10 bodova

Slijedi,  $2 \sphericalangle DAE + \sphericalangle BAC = 180^\circ$ . Kako je  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ , konačno je  $\sphericalangle DAE = 45^\circ$ .

5 bodova

Drugo rješenje. Koristeći kosinusov poučak dobivamo:

$$\triangle ABC \quad \dots \quad \cos \beta = \frac{20^2 + 29^2 - 21^2}{2 \cdot 20 \cdot 29} = \frac{20}{29}, \quad 5 \text{ bodova}$$

$$\triangle ABC \quad \dots \quad \cos \gamma = \frac{21^2 + 29^2 - 20^2}{2 \cdot 21 \cdot 29} = \frac{21}{29}, \quad 5 \text{ bodova}$$

$$\triangle ABD \quad \dots \quad |AD|^2 = 20^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 20 \cdot \frac{20}{29} = \frac{84^2}{29}$$

$$\text{tj. } |AD| = \frac{84}{\sqrt{29}}, \quad 5 \text{ bodova}$$

$$\triangle ACE \quad \dots \quad |AE|^2 = 21^2 + 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 21 \cdot \frac{21}{29} = \frac{(60\sqrt{2})^2}{29}$$

$$\text{tj. } |AE| = \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{29}}, \quad 5 \text{ bodova}$$

$$\triangle ADE \quad \dots \quad \cos \sphericalangle DAE = \frac{\frac{84^2}{29} + \frac{(60\sqrt{2})^2}{29} - 12^2}{2 \cdot \frac{84}{\sqrt{29}} \cdot \frac{60\sqrt{2}}{\sqrt{29}}}$$

$$= \frac{84^2 + 2 \cdot 60^2 - 12^2 \cdot 29}{2 \cdot 84 \cdot 60\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 5 \text{ bodova}$$

Dakle,  $\sphericalangle DAE = 45^\circ$ .

4. Pretpostavimo da je produkt neparan. Tada su svi njegovi faktori  $a_i + b_i$  neparni. Zato su brojevi  $a_i, b_i$  različitog pariteta. Tada je za svaki parni  $a_i$  broj  $b_i$  neparan, a za svaki neparan  $a_i$  broj  $b_i$  je paran. To znači da među zadanim brojevima mora biti isti broj parnih i neparnih brojeva, što je nemoguće jer ih ukupno ima 2003, a to je neparan broj.

25 bodova

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika  
srednjih škola Republike Hrvatske

7. ožujka 2003.

IV. razred

1. Nad stranicama  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$ , kvadrata  $ABCD$  konstruirani su s vanjske strane jednakostranični trokuti  $BCE$ ,  $CDF$ ,  $DAG$ . Odredite, kao funkciju duljine  $a$  stranice kvadrata, volumen tijela koje nastaje rotacijom lika  $BECFDGA$  oko pravca  $AB$ .

2. Neka je  $p$  realan broj. Odredite rješenja  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  jednadžbe

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0,$$

ako je poznato da su ona uzastopni članovi aritmetičkog niza.

3. Ako su  $\alpha$  i  $\beta$  kutovi trokuta, dokažite nejednakost

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \geq \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

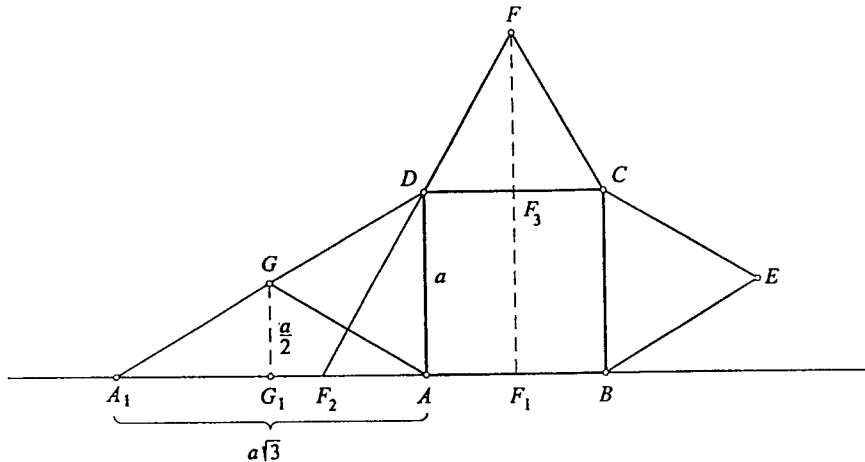
4. Nadite sve prirodne brojeve djeljive s 90 koji imaju točno 20 djelitelja.

Rješenja zadataka za IV. razred.

Svaki točno riješen zadatak vrijedi 25 bodova.

1. Traženi volumen  $V$  jednak je dvostrukom volumenu  $V_1$  tijela koje nastaje rotacijom lika  $AF_1FDG$  oko pravca  $AB$ . Volumen  $V_1$  jednak je zbroju volumena  $V_2$  tijela koje nastaje rotacijom trokuta  $ADG$  i volumena  $V_3$  tijela koje nastaje rotacijom lika  $AF_1FD$ .

3 boda



Volumen  $V_2$  jednak je razlici volumena stošca koji nastaje rotacijom trokuta  $A_1AD$  i dvostrukog volumena stošca koji nastaje rotacijom trokuta  $G_1AG$ . Dakle,

$$V_2 = \frac{a^2 \pi a \sqrt{3}}{3} - 2 \cdot \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \frac{a \sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{4}.$$

10 bodova

Volumen  $V_3$  je jednak razlici volumena stožaca koji nastaju rotacijom trokuta  $F_2F_1F$  i  $F_2AD$ . Ovdje je  $|FF_1| = a \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , a iz sličnosti trokuta  $F_2AD$  i  $DF_3F$  dobiva se  $|F_2A| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , odnosno  $|F_1F_2| = a \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right)$ . Sada se dobiva

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{|F_1F|^2 \pi \cdot |F_1F_2|}{3} - \frac{|AD|^2 \pi |F_2A|}{3} \\ &= \frac{\left[ a \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]^2 \pi \cdot \left( \frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{a}{2} \right)}{3} - \frac{a^2 \pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{3} \\ &= a^3 \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

10 bodova

Konačno se dobije,

$$V = 2V_1 = 2(V_2 + V_3) = a^3 \pi \cdot \left( \sqrt{3} + \frac{5}{4} \right). \quad 2 \text{ boda}$$

2. Prema Vièteovim formulama je

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= -p \\ x_1x_2x_3 &= -10. \end{aligned}$$

Kako su  $x_1, x_2, x_3$  uzastopni članovi aritmetičkog niza, možemo pisati

$$x_1 = x - d, \quad x_2 = x, \quad x_3 = x + d,$$

i uvrštavanjem u gornje izraze dobivamo:

$$\begin{aligned} 3x &= -2p \\ (x-d)x + x(x+d) + (x+d)(x-d) &= -p \\ (x-d)x(x+d) &= -10. \end{aligned} \quad (*)$$

10 bodova

Preostaje još riješiti ovaj sistem jednažbi. Iz prve je  $x = -\frac{2p}{3}$ , pa iz treće dobivamo

$$x^2 - d^2 = -\frac{10}{x} = \frac{15}{p},$$

a iz druge,

$$(x-d)x + x(x+d) + \frac{15}{p} = -p$$

$$2x^2 + \frac{15}{p} + p = 0$$

$$2 \cdot \frac{4p^2}{9} + \frac{15}{p} + p = 0$$

$$8p^3 + 9p^2 + 135 = 0.$$

5 bodova

Tražimo cjelobrojna rješenja ove jednažbe, a to moraju biti djelitelji od 135. Jedno rješenje je  $p = -3$ . Dijeljenjem dobivamo

$$(8p^3 + 9p^2 + 135) : (p + 3) = 8p^2 - 15p + 45.$$

Preostaje kvadratna jednažba  $8p^2 - 15p + 45 = 0$  koja nema realnih rješenja.

Za  $p = -3$  je  $x = 2$ , a iz  $x^2 - d^2 = -5$  je  $d^2 = 9$ , tj.  $d = \pm 3$ . Rješenja jednažbe su  $-1, 2, 5$ , a jednažba glasi

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0.$$

10 bodova

*Napomena.* Iz (\*) se mogu pogoditi rješenja jednažbe, ali tada treba obrazložiti da je to jedina mogućnost.

3. Prvo rješenje.

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{2 \sin \alpha \cos \beta} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta).$$

Korištenjem funkcije dvostrukog kuta i adicijonu formulu za  $\operatorname{ctg}$ , dana nejednakost postaje

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}} \right) \geq \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - 1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}. \quad 5 \text{ bodova}$$

Označimo li  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = a$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = b$ , dana nejednakost je ekvivalentna s

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a^2 - 1}{2a} + \frac{b^2 - 1}{2b} \right) \geq \frac{ab - 1}{a + b},$$

$$\frac{(ab - 1)(a + b)}{4ab} - \frac{(ab - 1)}{a + b} \geq 0$$

$$(ab - 1) \left( \frac{a + b}{4ab} - \frac{1}{a + b} \right) \geq 0$$

$$\frac{(ab - 1)(a - b)^2}{4ab(a + b)} \geq 0.$$

10 bodova

Kako su  $\alpha$  i  $\beta$  kutovi trokuta,  $\frac{\alpha}{2}$  i  $\frac{\beta}{2}$  su šiljasti kutovi. Zato je  $a = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} > 0$ ,  $b = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} > 0$ . Treba još samo pokazati da je  $ab - 1 \geq 0$ . Kako je  $0 < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 90^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) > 0$ , tj.

$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - 1}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}} \geq 0,$$

pa je  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - 1 \geq 0$ , tj.  $ab - 1 \geq 0$ .

10 bodova



Drugo rješenje. Nejednakost je ekvivalentna sljedećoj:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) - \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \alpha \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \right) \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2} (\sin \alpha - \sin \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \geq 0. \end{aligned}$$

10 bodova

Radi simetrije možemo pretpostaviti da je  $\alpha \geq \beta$ . Dovoljno je pokazati  $\sin \alpha \geq \sin \beta$ .

$$1^\circ \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \beta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \beta \leq \sin \alpha. \quad 5 \text{ bodova}$$

$$2^\circ \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \exists \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tako da je } \alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi. \text{ Tada je}$$

$$\sin \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = \cos \varphi.$$

$$\text{Nadalje, } \beta + \varphi = \beta + \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = (\alpha + \beta) - \frac{\pi}{2} < \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

pa je  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , odakle slijedi

$$\sin \beta < \sin \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi = \sin \alpha. \quad 10 \text{ bodova}$$

4. Kako je  $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ , traženi broj  $x$  možemo prikazati u obliku

$$x = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot \prod_{i>3} p_i^{n_i},$$

pri čemu je  $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2, n_3 \geq 1, n_1, n_2, n_3 \in \mathbf{N}$ .

10 bodova

Tada je broj djelitelja broja  $x$  jednak

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1) \prod_{i>3} (n_i + 1) = 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5. \quad 5 \text{ bodova}$$

Jedina mogućnost je  $n_1 + 1 = n_3 + 1 = 2$  i  $n_2 + 1 = 5$ , tj.  $n_1 = n_3 = 1$ ,

$n_2 = 4$  i  $n_i = 0$  za  $i > 3$ . Dakle, traženi broj je  $x = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^1 = 810$ . 10 bodova