MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

# MATEMATIKA

Zadaci za općinsko – gradsko natjecanje učenika
osnovnih škola Republike Hrvatske
7. ožujka 2003. godine

8. razred

1. Usporedi razlomke

$$\frac{\frac{1}{6}-(23\frac{1}{8}-19\frac{5}{12}):17.8}{0.6:4.2-\frac{2}{7}} \quad \text{i} \quad \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32}.$$

2. Broj vrhova mnogokuta P za 3 je veći od broja vrhova mnogokuta M, dok je broj svih dijagonala mnogokuta P tri puta veći od broja svih dijagonala mnogokuta M. Koliko stranica imaju mnogokuti P i M ?

3. Opseg romba je 52 cm, a opseg jednog od trokuta koji nastaju povlačenjem dijagonala je 30 cm. Izračunaj površinu romba.

4. Dva paralelna pravca sijeku kružnicu u četiri točke. Dokaži da su te točke vrhovi jednakokračnog trapeza.

5. Dva automobila krenula su istovremeno, jedan iz mjesta A u mjesto B, a drugi iz mjesta B u mjesto A. Vozeći svaki stalnom, ali međusobno različitim brzinama susreli su se nakon 8 sati vožnje. Ako bi brzina automobila iz mjesta A bila 14% veća nego što jeste, a brzina automobila iz mjesta B 15% veća nego što jeste, onda bi se susreli nakon 7 sati vožnje.

   Koji je automobil bio brži i koliko je puta njegova brzina veća od brzine sporijeg automobila?

OPĆ. 2003.

# RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

**OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.**

1. $\dfrac{\frac{1}{6}-(\frac{185}{8}-\frac{233}{12}):\frac{178}{10}}{\frac{6}{10}:\frac{42}{10}-\frac{2}{7}} = \dfrac{\frac{1}{6}-(\frac{555-466}{24})\cdot\frac{10}{178}}{\frac{6}{10}\cdot\frac{10}{42}-\frac{2}{7}} = \dfrac{\frac{1}{6}-\frac{89}{24}\cdot\frac{10}{178}}{\frac{1}{7}-\frac{2}{7}} = \dfrac{\frac{1}{6}-\frac{5}{24}}{-\frac{1}{7}} = \dfrac{7}{24}$ 4 boda

$\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2+\sqrt{72}}{32} = \dfrac{6-2\sqrt{18}+3+\sqrt{36\cdot 2}}{32} = \dfrac{9-6\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{32} = \dfrac{9}{32}$ 4 boda

Usporedimo razlomke $\frac{7}{24}$ i $\frac{9}{32}$. $7\cdot 32 = 224 > 216 = 9\cdot 24$, tj. $\frac{7}{24} > \frac{9}{32}$. 2 boda

.................................................................................................UKUPNO 10 BODOVA

2. Označimo s $n$ broj vrhova mnogokuta P. Tada je $n-3$ broj vrhova mnogokuta M. Broj svih dijagonala mnogokuta P je $S(n) = \frac{n(n-3)}{2}$, a broj svih dijagonala mnogokuta M je $S(n-3) = \frac{(n-3)(n-6)}{2}$. 2 boda

Iz uvjeta zadatka slijedi $\dfrac{n(n-3)}{2} = 3\cdot\dfrac{(n-3)(n-6)}{2}$. 2 boda

Rješavanjem ove jednadžbe dobivamo: $n = 3(n-6)$, tj. $n = 9$. 4 boda

Mnogokut P ima 9 stranica, a mnogokut M 6 stranica. 2 boda

.................................................................................................UKUPNO 10 BODOVA

3. Iz podatka o opsegu romba izračunamo duljinu stranice: $a = O : 4 = 13$ cm. 2 boda

Povlačenjem dijagonala nastaju 4 sukladna pravokutna trokuta sa stranicama $a, \frac{e}{2}, \frac{f}{2}$, pa imamo da je $a+\dfrac{e}{2}+\dfrac{f}{2}=30$, $\dfrac{e}{2}+\dfrac{f}{2}=30-13$, $\dfrac{e}{2}+\dfrac{f}{2}=17, e+f=34$. 2 boda

Primjenom Pitagorina poučka na taj trokut dobivamo: $(\dfrac{e}{2})^2+(\dfrac{f}{2})^2=a^2$, $e^2+f^2=676$. 2 boda

Dalje možemo postupati na dva načina.

**1. način** Kvadriramo obje strane jednakosti $e+f=34$. Dobivamo $e^2+2ef+f^2=1156$. Umjesto $e^2+f^2$ uvrstimo 676, pa imamo $2ef+676=1156$, $2ef=480$, $ef=240$. 3 boda

Površina romba je $P=\frac{ef}{2}=120\text{cm}^2$. 1 bod

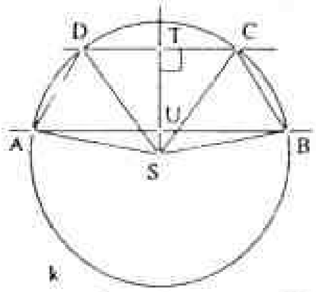
**2. način** Iz jednakosti $e+f=34$ izrazimo nepoznanicu $e$ i uvrstimo u drugu jednadžbu. $e=34-f$, $(34-f)^2+f^2=676$, $f^2-34f+240=0$. Ovu kvadratnu jednadžbu riješimo dopunom do potpunog kvadrata. $(f^2-34f+17^2)-17^2+240=0$, $(f-17)^2=49$. Rješenja su $f_1=24$ cm, $f_2=10$ cm. Druga dijagonala ima duljinu $e_1=10$ cm, $e_2=24$ cm. 3 boda

U oba slučaja romb ima površinu 120 $\text{cm}^2$. 1 bod

.................................................................................................UKUPNO 10 BODOVA

OPĆ. 8r. 2003.

4. Skica 1 bod




Označimo s $A$ i $B$ presjeke jednog pravca s kružnicom, a s $C$ i $D$ presjeke drugog pravca s kružnicom. Četverokut $ABCD$ je očito trapez jer su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ paralelne. Treba još dokazati da se radi o jednakokračnom trapezu. Povucimo okomicu iz središta kružnice $S$ na pravce $AB$ i $CD$. Presjek okomice s pravcem $AB$ označimo s $U$, a s pravcem $CD$ s $V$. Trokut $SCD$ je jednakokračan, pa visina na osnovicu ujedno leži na simetrali osnovice $\overline{CD}$, tj. okomica $ST$ raspolavlja stranicu $\overline{CD}$. Budući da je i trokut $ASB$ jednakokračan vrijedi sličan zaključak da okomica $SU$ raspolavlja stranicu $\overline{AB}$. 4 boda
Dalje imamo (barem) dva puta zaključivanja.

**1. način** Promotrimo osnu simetriju s obzirom na os $ST$. Ona točku $C$ preslikava u točku $D$, točku $B$ u točku $A$, a točka $S$ ostaje fiksna. Dakle, trokut $SBC$ preslikava se u trokut $SAD$, a budući da osna simetrija trokut preslikava u njemu sukladan trokut, slijedi da je $\triangle SBC \cong \triangle SAD$, tj. $|BC| = |AD|$. Dakle, trapez je jednakokračan. 5 bodova

**2. način**
$\overline{ST}$ je visina jednakokračnog trokuta $SCD$ pa raspolavlja i kut $\angle CSD$, tj. $\angle CST = \angle DST$. Slično, $\angle BSU = \angle ASU$. Iz toga slijedi $\angle BSC = \angle ASD$. Sad su trokuti $BSC$ i $ASD$ sukladni jer se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih. Iz te sukladnosti slijedi $|BC| = |AD|$. Dakle, trapez je jednakokračan. 5 bodova

........................................................................................UKUPNO 10 BODOVA

5. Označimo brzinu automobila iz mjesta A s $x$, a brzinu drugog s $y$. Tada vrijedi $8x + 8y = s$, gdje je $s$ duljina puta između mjesta A i B. Ako bi se brzina prvog povećala za 14%, tada bi mu brzina iznosila $1.14x$, a ako bi se brzina drugog povećala za 15%, brzina bi mu iznosila $1.15y$. 4 boda
Tada vrijedi $7 \cdot 1.14x + 7 \cdot 1.15y = s$. Izjednačimo te dvije jednadžbe:

$$8x + 8y = 7.98x + 8.05y.$$

Dobivamo da je $x = 2.5y$. 4 boda
Dakle, veća je brzina automobila koji je krenuo iz mjesta A i to 2.5 puta od brzine drugog automobila.
........................................................................................UKUPNO 10 BODOVA